Geometrie und deren anwendung auf das technische ...

Theodor Raetz

Digitized by Google

3169
.744
text
21/5-94.
a.c. not Atlas 5,35"

Library of

Dei Sub Numine Viget

Princeton University.

Presented by

MRS. WILLIAM C. OSBORN
MR. CHARLES SCRIBNER, '75,
MR. DAVID PATON, '74,
MR. HENRY W. GREEN, '91,
MR. ALEXANDER VAN RENSSELAER, '71
MR. ARCHIBALD D. RUSSELL,
MR. CYRUS H. McCORMICK, '79.

Digitized by Google

Geometrie

und deren

Anwendung auf das technische Gewerbe

für Künstler und Handwerker

(Bau-Eleven, Klempner, Kupferschmiede, Maurer, Maschinenbauer, Mechaniker, Mühlenbauer, Schlosser, Steinmetzen, Tischler, Zimmerleute ꝛc.)

Ein Lehrbuch für den Schul- und Selbstunterricht

von

Th. Raetz

weil. Techniker und Zeichenlehrer für das Bau- und Maschinenfach, Ritter pp.

Mit 465 Figuren auf 22 Tafeln.

Zehnte verbesserte Auflage.

Straßburg,

Straßburger Druckerei und Verlagsanstalt,

vorm. R. Schultz u. Co.

1894.

Digitized by Google

Das Recht der Ueberſetzung wird vorbehalten.

Digitized by Google

Vorwort zur zehnten Auflage.

Dem Wunsche der Verlagsanstalt gemäß ist die neunte Auflage dieses Werkchens einer eingehenden Durchsicht unterzogen und hat besonders der erste Teil „Geometrie" bezüglich der Anordnung und Behandlung des Stoffes eine wesentliche Umgestaltung erfahren, wobei das im gleichen Verlage erschienene „Lehrbuch der Geometrie" von Ernst und Stolte manche dankenswerte Dienste (vergl. die Sätze über die Parallelität u. a.) geleistet hat. Möge diese so veränderte Auflage sich derselben Aufnahme und Verbreitung, wie die früheren, erfreuen dürfen.

(RECAP)
81 G2
.744
text

421923

Digitized by Google

Inhaltsverzeichnis.

I. Geometrie.

Seite

Einleitung . . . 1
Von den Linien und Winkeln . . . 2
Von den Flächen im allgemeinen . . . 4
Von den Dreiecken . . . 5
Von den Vierecken . . . 7
Von dem Kreise . . . 8
Von den Vielecken . . . 9
Von der Ähnlichkeit der Figuren . . . 10
Von der Maß- und Gewichts-Ordnung . . . 12
Von der Berechnung des Umfanges der Figuren . . . 14
Von der Berechnung der Flächen . . . 18
Von dem Ausziehen der Quadratwurzel . . . 27
Von den planimetrischen Konstruktionen . . . 30
Von der Konstruktion der Korbbogen, Ellipsen und Eilinien . . . 35
Von der Konstruktion der Gewölbebogen und anderer häufig angewandter Linien. 38
Von den architektonischen Gliedern . . . 41
Von der Verwandlung der Figuren . . . 42
Von der Flächeneinteilung . . . 43
Von der praktischen Geometrie . . . 45
Von den geometrischen Körpern . . . 48
Von der Inhaltsberechnung der Körper . . . 52
Von der Oberflächenberechnung der Körper . . . 62
Von dem Ausziehen der Kubikwurzel . . . 66

II. Zeichnen.

Von der Projektionslehre . . . 69
Von dem Gebrauch des verjüngten Maßstabes . . . 75
Von den Netzen regelmäßiger Körper . . . 78
Von den Netzen verschiedener Gegenstände . . . 80
Von den Körperdurchdringungen . . . 88
Von den Netzen der Kegel, Pyramidenstumpfe u. dergl . . . 91
Von den Zeicheninstrumenten und Zeichenmaterialien . . . 98
Tabelle der spezifischen Gewichte fester und flüssiger Körper . . . 102
Kreisumfänge, Kreisinhalte, Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln. 103
Tabelle der Inhalte und Oberflächen der Körper . . . 106

Digitized by Google

I. Geometrie.

Einleitung.

§ 1. Die Geometrie ist derjenige Teil der Mathematik, welcher die Lehre von den Körpern, Flächen, Linien und Punkten umfaßt.

§ 2. Ein Körper ist ein allseitig begrenzter Teil des Raumes; derselbe hat wie der Raum drei Ausdehnungen: Länge, Breite und Höhe (Tiefe, Dicke). Die Grenzen eines Körpers heißen Flächen. Die Fläche hat keine Höhe, also nur zwei Ausdehnungen: Länge und Breite. Die Grenzen der Fläche heißen Linien. Die Linie hat weder Höhe noch Breite, also nur eine Ausdehnung: Länge. Die Grenzen der Linie heißen Punkte. Der Punkt hat weder Länge noch Breite noch Höhe, also keine Ausdehnung.

§ 3. Durch Bewegung eines Punktes entsteht eine Linie. Zwischen dem Ausgangs- und Endpunkte der Bewegung sind sehr viele Linien möglich. Die kürzeste unter diesen heißt die gerade Linie [Gerade] (Fig. 1—3); dieselbe ist durch zwei ihrer Punkte völlig bestimmt. Zwei verschiedene Gerade können daher nicht mehr als einen Punkt (Schnittpunkt) gemein haben (Fig. 5—9). Ein von zwei Punkten a, b (Fig. 1) begrenzter Teil einer Geraden heißt Strecke. Zum Messen von Strecken dient das Metermaß.

Eine Linie heißt krumm, wenn kein Teil derselben gerade ist.

§ 4. Eine Fläche entsteht durch Bewegung einer Linie. Die durch Bewegung einer Geraden erzeugte Fläche heißt geradlinige Fläche (Cylinder-, Kegelmantel). Die einfachste aller geradlinigen Flächen heißt Ebene; sie ist eine Fläche, in der man nach allen, nicht nur nach einzelnen Richtungen Gerade ziehen kann.

§ 5. Ein Körper entsteht durch Bewegung einer Fläche.

§ 6. Die Geometrie wird eingeteilt in ebene Geometrie (Planimetrie), welche von den Gebilden einer und derselben Ebene, und in körperliche Geometrie (Stereometrie), welche von den Gebilden im Raume handelt.

§ 7. Man unterscheidet in der Mathematik Grund- und Lehrsätze.

Ein Grundsatz ist ein Satz, der keines Beweises bedarf. Die gewöhnlichsten Grundsätze sind:

a) Das Ganze ist größer als ein Teil desselben.

b) Zwei Größen, welche einer und derselben dritten Größe gleich sind, sind unter sich gleich.

Digitized by Google

c) Gleiches zu Gleichem addiert, gibt Gleiches; Gleiches von Gleichem subtrahiert, gibt Gleiches; Gleiches mit Gleichem multipliziert, gibt Gleiches; Gleiches durch Gleiches dividiert, gibt Gleiches.

Ein Lehrsatz ist ein Satz, dessen Wahrheit erst bewiesen werden muß.

Von den Linien und Winkeln.

§ 8. Die einfachste krumme Linie, welche in der Planimetrie betrachtet wird, ist die Kreislinie, auch Umkreis, Peripherie oder kurz Kreis genannt (Fig. 11). Der Kreis entsteht, wenn sich eine Strecke um einen ihrer Endpunkte so lange dreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt. Die von dem beweglichen Endpunkt beschriebene krumme Linie heißt der Umkreis, die von der Strecke erzeugte Fläche die Kreisfläche; die erzeugende Strecke heißt Radius oder Halbmesser; der feste Punkt (Drehpunkt) derselben Mittelpunkt; jede Strecke, welche zwei Punkte des Umkreises verbindet, Sehne; jede Sehne durch den Mittelpunkt Durchmesser; jeder Teil des Umkreises Kreisbogen.

Alle Punkte des Umkreises haben vom Mittelpunkte gleiche Entfernung (Entfernung gleich dem Radius des Kreises).

§ 9. Der Durchmesser teilt die Kreisfläche wie Kreislinie in zwei gleiche Teile, Halbkreise. Der vierte Teil eines Kreises heißt Viertelkreis (Quadrant), der sechste Teil Sextant (Fig. 12).

§ 10. Die Kreislinie wird, mag der Radius groß oder klein sein, stets in 360 gleiche Teile geteilt, welche Bogengrade genannt werden. Ein Bogengrad wird, wie die Stunden der Zeit, in 60 Bogenminuten, eine Minute in 60 Bogensekunden eingeteilt.

Das Zeichen der Bogengrade ist eine kleine Null, das der Bogenminuten ein Strich, das der Sekunden zwei Striche in der Höhe der Ziffern rechts. Z. B. 12° 34′ 16″ heißt: 12 Bogengrade 34 Bogenminuten 16 Bogensekunden.

§ 11. Zwei Gerade, welche von einem Punkte ausgehen, bilden einen Winkel (Fig. 5—7). Die Geraden heißen die Schenkel, der gemeinsame Punkt Scheitelpunkt. Bezeichnet wird ein Winkel gewöhnlich mit drei Buchstaben, von welchen der mittlere dem Scheitelpunkt des Winkels angehört, die beiden andern stehen entfernter bei je einem der Schenkel; so wird z. B. in Fig. 5 der Winkel bezeichnet und gelesen: ∢ a b c oder ∢ c b a. Ist eine Verwechselung nicht möglich, so genügt der Buchstabe am Scheitelpunkt zur Bezeichnung des Winkels, wie in Fig. 6 ∢ a. Ferner bezeichnet man auch wohl einen Winkel durch einen Buchstaben zwischen den Schenkeln in der Nähe des Scheitelpunktes, wie in Fig. 9 ∢ p.

§ 12. Die Größe der Drehung, durch welche die Gerade a c (Fig. 6) aus ihrer Lage in diejenige von a b kommt, d. h. der Richtungsunterschied, nicht die Länge der Geraden, bestimmt die Größe des Winkels.

Dreht sich die Gerade a c so lange um a, bis sie in ihre alte Lage zurückkehrt, d. h. macht a c eine volle Umdrehung um a, so nennt man den entstandenen Winkel einen Vollwinkel. Gemessen wird ein Winkel, z. B. ∢ b a c (Fig. 6) dadurch, daß man bestimmt, den wievielten Teil ($\frac{1}{6}$, $\frac{2}{3}$) der vollen Umdrehung derselbe ausmacht.

§ 13. Während die Gerade c b (Fig. 8) durch Drehen um c einen Vollwinkel durchläuft, beschreibt irgend ein Punkt auf c b einen Kreis, und da der Vollwinkel in 360 gleiche Winkelgrade (360°), 1° in 60 Winkel-

Digitized by Google

minuten (60′), 1′ in 60 Winkelsekunden (60″), genau wie der Kreis in 360 Bogengrade u. s. w. geteilt wird, so durchläuft ein Schenkel eines Winkels beim Drehen genau so viele Winkelgrade als ein auf ihm liegender Punkt Bogengrade (§ 10).

§ 14. Um die Grade eines Winkels bestimmen zu können, bedient man sich des Transporteurs oder Winkelmessers, eines aus Messing, Holz oder Papier gefertigten, in 180° eingeteilten Halbkreises, dessen Mittelpunkt durch einen kleinen Einschnitt bezeichnet ist.

Man legt den Winkelmesser (Fig. 89) mit dem Mittelpunkte, dem Einschnitte, auf den Scheitelpunkt des zu messenden Winkels und den Kreishalbmesser auf den einen Winkelschenkel: begrenzt alsdann der andere Winkelschenkel auf dem Kreise einen Bogen von z. B. 45 Bogengraden, so hat der zu messende Winkel 45 Winkelgrade.

§ 15. Die Hälfte eines Vollwinkels, z. B. a c b (Fig. 8) heißt ein flacher Winkel. Die Schenkel a c, c b des flachen Winkels bilden eine Gerade. Der flache Winkel hat 180°.

Der vierte Teil eines Vollwinkels, z. B. ∢ a b c (Fig. 5) heißt ein rechter Winkel (Rechter, R). Der rechte Winkel hat 90°. Die Schenkel a b, b c eines rechten Winkels a b c stehen senkrecht (⊥) auf einander.

Ein Winkel, der kleiner ist als ein rechter, heißt ein spitzer (Fig. 6); ein Winkel, der größer ist als ein rechter aber kleiner als ein flacher, heißt ein stumpfer (Fig. 7); ein Winkel, der größer ist als ein flacher, heißt ein überstumpfer Winkel.

§ 16. Schneiden sich zwei Gerade (Fig. 9), so entstehen 4 Winkel um ihren Schnittpunkt.

Je zwei benachbarte Winkel am Schnitte zweier Geraden, wie ∢ m und o, oder ∢ m und n u. s. w., heißen Nebenwinkel.

Je zwei einander gegenüberliegende Winkel am Schnitte zweier Geraden, wie ∢ m und p oder ∢ n und o, heißen Scheitelwinkel.

§ 17. Lehrsatz. Zwei Nebenwinkel betragen zusammen 2 R (Fig. 9).

Beweis. Die beiden Nebenwinkel m, o machen zusammen einen flachen Winkel aus, betragen also zusammen 2 R.

Sind also zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder = 1 R.

§ 18. Lehrsatz. Scheitelwinkel sind einander gleich (Fig. 9).

Beweis. Die Scheitelwinkel o und n sind einander gleich, weil sie durch dieselbe Drehung entstanden sind (§ 12).

§ 19. Zwei auf einander liegende Gerade können, wie § 12 zeigt, durch Drehen der einen (Fig. 9) um irgend einen ihrer Punkte von einander entfernt werden. Es lassen sich jedoch zwei sich deckende Gerade 1, 2 (Fig. 10) auch in der Weise von einander trennen, daß die eine derselben, etwa die Gerade 2, längs einer beide schneidenden Geraden 3 so hingleitet, daß der ∢ m (∢ m = p) ungeändert bleibt. Eine derartige Verschiebung heißt Parallelverschiebung, und die erhaltenen Geraden heißen parallele (∥) Gerade.

Gleichzeitig mit dem Winkel m werden auch die Winkel r, s, t verschoben. Winkel, die, wie ∢ m und p, durch Parallelverschiebung aus einander entstehen, heißen entsprechende Winkel; Winkel, die, wie ∢ m und n, aus Scheitelwinkeln entstehen, Wechselwinkel; Winkel endlich, die, wie ∢ m und o, aus Nebenwinkeln entstehen, Ergänzungswinkel. Da, wenn zwei entsprechende Winkel gleich sind, nach § 18 auch zwei Wechselwinkel gleich sind und nach § 17 zwei Ergänzungswinkel zusammen 2 R betragen, so sind parallele Gerade solche, welche mit einer sie schneidenden dritten gleiche entsprechende Winkel

Digitized by Google

(oder gleiche Wechselwinkel, oder Ergänzungswinkel, die zusammen 2 R ausmachen) bilden.

Eine Parallelverschiebung kann nur auf eine einzige Art erfolgen, sie ist eindeutig, d. h.:

Grundsatz. Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden ist zu dieser nur eine Parallele möglich.

§ 20. In § 19 ist die parallele Lage der Geraden 1, 2 (Fig. 10) dadurch erzeugt, daß sie mit einer Geraden gleiche entsprechende Winkel bildet. Es ist noch nachzuweisen, daß die Parallelen 1, 2 mit jeder sie schneidenden dritten Geraden gleiche entsprechende Winkel erzeugen. Zu diesem Zwecke schneidet man die gegebenen Parallelen 1, 2 durch eine ganz beliebige Gerade 3 und verschiebt 2 längs 3 so, daß ∢ m ungeändert bleibt: so muß 2 endlich auf 1 fallen nach dem in § 19 angegebenen Grundsatze und damit ∢ m auf p, ∢ s auf o u. s. w. Daraus folgt:

Lehrsatz. Entsprechende Winkel, ebenso Wechselwinkel an Parallelen sind gleich; Ergänzungswinkel an Parallelen betragen zusammen 2 R.

§ 21. Die Bezeichnungen: Entsprechende Winkel, Wechselwinkel, Ergänzungswinkel werden auch dann gebraucht, wenn die geschnittenen Geraden nicht parallel sind.

§ 22. Lehrsatz. Sind zwei Gerade einer und derselben dritten parallel, so sind sie auch unter sich parallel.

Beweis. Es seien die Geraden 1 und 2 der Geraden 3 parallel. Schneidet man die gegebenen Geraden 1, 2, 3 durch eine vierte, so bilden 1, 3, ebenso 2, 3, mithin auch 1, 2 mit 4 gleiche entsprechende Winkel, d. h. 1 ist parallel 2 (§ 19).

§ 23. Lehrsatz. Durch einen Punkt ist zu einer Geraden nur eine Senkrechte möglich.

Beweis. Senkrechte auf einer Geraden sind parallel, da sie mit derselben gleiche (rechte) entsprechende Winkel bilden (§ 19). Durch einen Punkt a ist zu den vorhandenen Senkrechten nur eine Parallele möglich (§ 19), d. h. durch a gibt es zur gegebenen Geraden nur eine Senkrechte.

Die zu der Geraden a b (Fig. 5) senkrechte Strecke c b heißt der Abstand des Punktes c von der Geraden a b.

§ 24. Gerade, welche zur Richtung eines Senkbleies parallel sind, heißen lotrecht (vertikal); Gerade, welche zur genannten Richtung senkrecht stehen, heißen wagerecht (horizontal); letztere sind zu der durch eine Wasserwage angedeuteten Richtung parallel.

Von den Flächen im allgemeinen.

§ 25. Ein allseitig begrenzter Teil einer Fläche heißt Figur. Die Grenzen der Figuren heißen Seiten. Die Seiten sind entweder krummlinig oder geradlinig.

Ein allseitig begrenzter Teil einer Ebene heißt ebene Figur. Bei den geradlinigen ebenen Figuren heißen die begrenzenden Geraden Seiten, die Schnittpunkte der auf einander folgenden Seiten Ecken, die Winkel zwischen den auf einander folgenden Seiten Innenwinkel, die Winkel zwischen einer Seite und der Verlängerung der folgenden Außenwinkel. Nach der Zahl der Ecken unterscheidet man Dreieck, Viereck, Vieleck.

Digitized by Google

Wenn in einem Vieleck alle Seiten gleich sind, so heißt dasselbe gleichseitig; wenn alle Winkel gleich sind, gleichwinklig. Ein Vieleck, welches sowohl gleichseitig als gleichwinklig ist, heißt regelmäßig [regulär] (Fig. 53 u. 54).

Von den Dreiecken.

§ 26. Ein von drei Seiten begrenzter Teil der Ebene heißt Dreieck. Ein Dreieck hat drei Eckpunkte, drei Seiten, drei Innenwinkel, drei Außenwinkel.

§ 27. Lehrsatz. In einem Dreiecke sind zwei Seiten zusammen genommen größer als die dritte (Fig. 16).

Beweis. Der kürzeste Weg von b nach c ist die Gerade (§ 3), also ist der Weg von b über a nach c d. h. b a und a c zusammen genommen größer als b c.

Hinsichtlich der Seiten unterscheidet man folgende Dreiecke:

1. Das gleichseitige Dreieck. Dasselbe hat drei einander gleiche Seiten (Fig. 16).
2. Das gleichschenklige Dreieck. Dasselbe hat zwei einander gleiche Seiten (Schenkel); die dritte ungleiche Seite heißt Grundlinie (Basis), die der Grundlinie gegenüberliegende Ecke Spitze (Fig. 17).
3. Das ungleichseitige Dreieck. Dasselbe hat drei einander ungleiche Seiten (Fig. 18).

§ 28. Lehrsatz. In einem Dreiecke sind die drei Innenwinkel zusammen genommen gleich 180° oder 2 R (Fig. 25).

Beweis. In Fig. 25 sind sowohl die drei Innen- wie die drei Außenwinkel gezeichnet. Jeder Innenwinkel macht mit dem neben ihm liegenden Außenwinkel 2 R aus als Nebenwinkel (§ 17); also betragen alle Innen- und Außenwinkel zusammen 6 R. Beschreibt man aber der Erklärung des Winkels gemäß den Außenwinkel p durch Drehen von b d um b, bis b d in die Lage von b c fällt, verschiebt hierauf b c in der Richtung von b c bis c und beschreibt durch ferneres Drehen in gleicher Weise den Außenwinkel e c a, bis e c auf c a zu liegen kommt, verschiebt alsdann c a auf c a nach a und beschreibt in derselben Weise den dritten Außenwinkel f a b, so kehrt b d in die ursprüngliche Lage zurück, d. h. b d hat einen Vollwinkel beschrieben, oder die drei Außenwinkel machen zusammen 4 R aus. Da aber die Innen- und Außenwinkel zusammen 6 R betragen, so bleibt für die Innenwinkel zusammen noch 2 R.

§ 29. Lehrsatz. Zwei Innenwinkel eines Dreiecks zusammen genommen sind gleich dem Außenwinkel, der nicht neben ihnen liegt (Fig. 26).

Beweis. Die drei Innenwinkel m, n, o betragen zusammen 2 R (§ 28). Es machen aber auch die Winkel o und p als Nebenwinkel 2 R aus; folglich müssen ∠ m und n zusammen so groß als p sein.

§ 30. Da alle drei Innenwinkel zusammen 2 R ausmachen, so müssen zwei derselben stets spitz sein. Der dritte ist entweder 1. auch spitz oder 2. recht oder 3. stumpf. Demnach unterscheidet man hinsichtlich der Winkel folgende Dreiecke:

1. Das spitzwinklige Dreieck. Dasselbe hat drei spitze Winkel (Fig. 20).
2. Das rechtwinklige Dreieck (Fig. 19). Dasselbe hat zwei spitze und einen rechten Winkel. Die den rechten Winkel einschließenden Seiten

Digitized by Google

a b, b c heißen Katheten, die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite a c Hypotenuse.

3. Das stumpfwinklige Dreieck. Dasselbe hat zwei spitze und einen stumpfen Winkel (Fig. 21).

§ 31. Lehrsatz. In einem gleichschenkligen Dreiecke liegen den gleichen Schenkeln gleiche Winkel gegenüber (Fig. 24).

Beweis. Man denke sich das Dreieck a b c aus der Ebene herausgeschnitten und so herumgedreht, daß die gleichen Schenkel a c, b c ihre Lage vertauschen; alsdann deckt ∢ m die frühere Lage von n und ∢ n die alte Lage von m, d. h. ∢ m = ∢ n.

Hieraus folgt, daß in einem gleichseitigen Dreiecke alle Winkel einander gleich sind. Jeder derselben ist gleich dem dritten Teile von 180° = 60° oder $\frac{2}{3}$ R (Fig. 16).

§ 32. Lehrsatz. Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so ist das Dreieck ein gleichschenkliges (Fig. 24).

Beweis. Man denke sich das Dreieck a b c aus der Ebene herausgeschnitten und so herumgedreht, daß die gleichen Winkel m und n ihre Lage vertauschen; alsdann fällt a c in die frühere Lage von b c und b c in die frühere Lage von a c, also a c = b c.

§ 33. Zwei Dreiecke und Figuren überhaupt heißen kongruent, wenn sie auf einander gelegt sich vollständig decken, so daß also das eine vom andern in keiner Weise zu unterscheiden ist. Das Zeichen der Kongruenz ist ≅. Seiten und Winkel kongruenter Figuren, welche beim Aufeinanderlegen sich decken, heißen entsprechende Seiten bezw. entsprechende Winkel.

§ 34. Erster Kongruenzsatz. Ein Dreieck ist völlig bestimmt durch einen Winkel und die beiden diesen Winkel einschließenden Seiten (Fig. 23).

Beweis. Trägt man auf den Schenkeln des gegebenen Winkels A die beiden gegebenen Seiten a c, a b von a aus ab, so sind die Endpunkte c, b, mithin auch das Dreieck völlig bestimmt.

§ 35. Zweiter Kongruenzsatz. Ein Dreieck ist völlig bestimmt durch eine Seite und zwei Winkel (Fig. 24).

Beweis. Gegeben seien die Seite a b und die beiden anliegenden Winkel m, n. Trägt man an a b in a den Winkel m, in b den Winkel n an, so ist die Richtung der freien Schenkel, also auch ihr Schnittpunkt c, d. h. das Dreieck völlig bestimmt.

Der Satz bleibt auch dann richtig, wenn ein anliegender und ein gegenüberliegender Winkel gegeben ist. Denn, wenn zwei Dreieckswinkel bekannt sind, so kennt man auch den dritten, da alle drei zusammen 180° ausmachen.

§ 36. Dritter Kongruenzsatz. Ein Dreieck ist völlig bestimmt durch die drei Seiten (Fig. 20).

Beweis. Legt man die Seite a b fest und schlägt mit a c um a, mit b c um b den Kreis, so liegt c im Durchschnitt beider Kreise, ist also völlig bestimmt und damit auch das Dreieck selbst.

§ 37. Lehrsatz. Verbindet man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundlinie, so halbiert dieselbe den Winkel an der Spitze und steht auf der Grundlinie senkrecht (Fig. 17).

Beweis. Die Gerade c d, welche die Spitze c mit der Mitte d der Grundlinie a b verbindet, zerlegt das Dreieck a b c in zwei kongruente Teildreiecke a c d und b c d, denn c d = c d, a c = c b, a d = d b (§ 36). Bei der Deckung fällt also ∢ a c d auf ∢ b c d, d. h. ∢ a c d = ∢ b c d, und ∢ a d c fällt auf b d c, mithin ∢ a d c = ∢ b d c. Da aber ∢ a d c

Digitized by Google

und ∢ b d c Nebenwinkel sind, so ist jeder = 1 R (§ 17), d. h. c d steht senkrecht auf a b.

§ 38. Zieht man in einem Dreiecke von einer Ecke aus die Senkrechte auf die gegenüberliegende Seite, so heißt diese Strecke „Höhe" (Fig. 17, 21).

Von den Vierecken.

§ 39. Ein von vier Seiten begrenzter Teil der Ebene heißt Viereck (§ 25). Die Gerade, welche zwei gegenüberliegende Ecken eines Vierecks verbindet, heißt Diagonale. Die Diagonale teilt das Viereck in zwei Dreiecke, und da die Winkel in einem Dreieck 2 R betragen, so machen die Winkel in einem Viereck zusammen 4 R aus.

Man unterscheidet folgende besondere Arten von Vierecken:

1. Das Trapez. In demselben sind zwei gegenüberliegende Seiten parallel (Fig. 31).
2. Das Parallelogramm. In demselben sind je zwei gegenüberliegende Seiten parallel (Fig. 30).
3. Das Rechteck. Dasselbe ist ein gleichwinkliges Parallelogramm. Jeder Winkel des Rechtecks ist gleich 1 R (Fig. 28).
4. Der Rhombus. Derselbe ist ein gleichseitiges Parallelogramm (Fig. 29).
5. Das Quadrat. Dasselbe ist ein gleichseitiges und gleichwinkliges Parallelogramm d. h. ein regelmäßiges Viereck [§ 25] (Fig. 27).

§ 40. Lehrsatz. Jedes Parallelogramm wird durch jede der Diagonalen in zwei kongruente Dreiecke zerlegt (Fig. 37).

Beweis. Dreieck a b d ≅ a c d (§ 35); denn a d ist sich selbst gleich, ∢ b a d = a d c und ∢ a d b = d a c als Wechselwinkel an Parallelen (§ 20).

Aus obigem Satze folgt, daß in einem Parallelogramm die gegenüberliegenden Seiten und Winkel einander gleich sind (§ 33).

§ 41. Lehrsatz. In einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.

Beweis. In Fig. 37 ist Dreieck a o b ≅ d o c (§ 35), dann a b = d c (§ 40), ∢ b a d = a d c, ∢ b d a = d a c als Wechselwinkel an Parallelen (§ 20).

§ 42. Lehrsatz. Im Rechteck sind die Diagonalen einander gleich (Fig. 28).

Beweis. Schneidet man das Rechteck a b c d aus der Ebene heraus und dreht es so herum, daß die rechten Winkel bei c und bei d ihre Lage vertauschen, so fällt, da die Seiten c a und d b einander gleich sind (§ 40), c b in die alte Lage von a d, also c b = a d.

§ 43. Lehrsatz. Im Rhombus stehen die Diagonalen auf einander senkrecht.

Beweis. Da der Rhombus ein Parallelogramm ist, so halbieren sich die Diagonalen (§ 41). Da ferner ein Rhombus aus zwei gleichschenkligen kongruenten Dreiecken zusammengesetzt ist (§ 40, § 39), so steht die Gerade, welche die Spitze eines dieser Dreiecke mit der Mitte der Grundlinie verbindet, auf derselben senkrecht (§ 37).

§ 44. Lehrsatz. In einem Quadrat halbieren sich die Diagonalen, sind einander gleich und stehen auf einander senkrecht.

Beweis. Die Diagonalen halbieren sich, weil das Quadrat ein Parallelogramm ist; die Diagonalen sind einander gleich, weil das Quadrat ein Rechteck ist; die Diagonalen stehen auf einander senkrecht, weil das Quadrat ein Rhombus ist.

Digitized by Google

§ 45. Lehrsatz. Errichtet man auf jeder der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ein Quadrat, so ist das Quadrat über der Hypotenuse ebenso groß wie die Quadrate über den beiden Katheten zusammen genommen.

Beweis. Man verlängere die Kathete A B des rechtwinkligen Dreiecks A B C (Fig. 39) um die Kathete A C = B D und errichte über A D das Quadrat A D E F. Macht man D G = E H = F C = A B, so ist G E = H F = A C = B D; verbindet man ferner B, G, H, C, so zerfällt das ganze Quadrat A D E F in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke (§ 34) und ein gleichseitiges Viereck B G H C. Da die Winkel b und c zusammen 1 R ausmachen, so sind auch die Viereckswinkel B, G, H, C je gleich 1 R, d. h. das Quadrat A D E F besteht aus vier rechtwinkligen kongruenten Dreiecken und dem Quadrat über der Hypotenuse B C. Zieht man dagegen in dem Quadrat A D E F (Fig. 40) durch C die Parallele zu A D und durch B die Parallele zu A F, so besteht das Quadrat A D E F aus den beiden Quadraten über C J = A B und B J = A C, sowie den beiden kongruenten Rechtecken A B J C und J K E L. Jedes dieser Rechtecke zerfällt wiederum durch eine Diagonale in je zwei A B C kongruente Dreiecke (§ 40), woraus leicht ersichtlich ist, daß das Quadrat über B C so groß ist wie die Quadrate über B A und A C zusammen genommen.

Von dem Kreise.

§ 46. Eine den Kreis (§ 8) schneidende Gerade heißt Sekante; eine Gerade, welche mit dem Kreise nur einen Punkt gemeinsam hat, Tangente. Ein von einer Sehne und dem zugehörigen Bogen begrenzter Teil der Kreisfläche heißt Kreisabschnitt, ein von zwei Radien und dem zwischen ihnen liegenden Kreisbogen begrenzter Teil der Kreisfläche Kreisausschnitt (Fig. 11, 12, 13).

Kreise mit gemeinsamem Mittelpunkt heißen koncentrisch; Kreise mit nicht gemeinsamem Mittelpunkt excentrisch. Eine zwischen zwei Umkreisen liegende Fläche heißt Kreisring (Fig. 14 u. 15).

§ 47. Liegt der Scheitelpunkt eines Winkels im Mittelpunkte eines Kreises, so heißt er ein Winkel am Mittelpunkt oder Centriwinkel. Aus der Erklärung des Winkels (§ 13) folgt unmittelbar, daß zu gleichen Centriwinkeln eines Kreises gleiche Bogen gehören und umgekehrt.

Liegt der Scheitelpunkt eines Winkels an der Peripherie, sind also die Schenkel beide Sehnen oder der eine Schenkel eine Sehne, der andere eine Tangente, so heißt der Winkel Peripheriewinkel (Fig. 43, 44).

§ 48. Lehrsatz. Zieht man vom Kreismittelpunkte nach der Mitte einer Sehne eine Gerade, so halbiert dieselbe den zur Sehne gehörigen Centriwinkel und steht auf der Sehne senkrecht (Fig. 41).

Beweis. Verbindet man den Kreismittelpunkt c mit den Endpunkten der Sehne a b, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck a c b (§ 37).

§ 49. Lehrsatz. Der Radius, welcher nach dem Berührungspunkte der Tangente geht, steht auf derselben senkrecht (Fig. 41).

Beweis. Wird die Sekante a b parallel vom Mittelpunkte fort verschoben, so nähern sich die Punkte a, b unausgesetzt und fallen, da k Mitte der Sehne bleibt, gleichzeitig mit k in d zusammen. g ist alsdann Tangente und c d der zu ihr senkrechte Radius nach dem Berührungspunkte d.

§ 50. Lehrsatz. Der Peripheriewinkel hat halb so viel Winkelgrade als der zwischen seinen Schenkeln liegende Bogen Bogengrade.

Beweis 1. Die Schenkel des Peripheriewinkels sind Tangente und Sehne (Fig. 43). Verbindet man c mit b, d und der Mitte f von b d, so

Digitized by Google

ist $\sphericalangle u + y = 1$ R (§ 49) aber auch $\sphericalangle y + z = 1$ R (§ 48); also ist $\sphericalangle u = \sphericalangle z$. $\sphericalangle z$ ist aber die Hälfte des $\sphericalangle b c d$, also hat $\sphericalangle z$ und damit $\sphericalangle u$ halb so viel Winkelgrade als der Bogen b d Bogengrade.

2. Beide Schenkel sind Sehnen (Fig. 48). Zieht man im Scheitelpunkt a des Peripheriewinkels b a c die Tangente a d, so hat $\sphericalangle y$ halb so viel Winkelgrade als Bogen c b a Bogengrade (§ 50, 1); $\sphericalangle x$ halb so viel Winkelgrade als Bogen b a Bogengrade. Also hat $\sphericalangle y$ weniger $\sphericalangle x$ d. h. $\sphericalangle u$ halb so viel Winkelgrade als Bogen c b a weniger Bogen b a d. h. Bogen c b Bogengrade.

§ 51. Lehrsatz. Peripheriewinkel auf demselben oder gleichen Bogen sind einander gleich (Fig. 46).

Beweis. Peripheriewinkel auf demselben oder gleichen Bogen sind einander gleich, da sie halb so viel Winkelgrade haben als der zwischen ihren Schenkeln liegende Bogen Bogengrade.

§ 52. Lehrsatz. Der Peripheriewinkel auf einem Halbkreise ist gleich 1 R.

Beweis. Der Halbkreis hat 180 Bogengrade (§ 10), also hat der zugehörige Peripheriewinkel 90 Winkelgrade (§ 50), ist also = 1 R.

§ 53. Lehrsatz. Die Strecken zwischen den Berührungspunkten und den Schnittpunkten zweier Tangenten sind einander gleich (Fig. 51).

Beweis. Verbindet man die beiden Berührungspunkte a, c mit einander, so sind die beiden Peripheriewinkel a, c gleich, da sie halb so viel Winkelgrade haben als der Bogen a c Bogengrade (§ 51). Mithin ist auch a b = b c (§ 32).

§ 54. Lehrsatz. Um jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Beweis. Errichtet man in der Mitte der Dreiecksseiten a b und a c die Senkrechten d m, f m und verbindet den Schnittpunkt m derselben mit a, b, c, so ist Dreieck a m f $\cong$ c m f (§ 34), denn a f = f c, f m = f m und $\sphericalangle$ a f m = c f m = 1 R, also ist auch a m = m c. Ebenso ist $\triangle$ a m d $\cong$ m d b (§ 34), denn a d = d b, d m = d m, $\sphericalangle$ a d m = m d b = 1 R, also ist auch a m = m b. Es hat also m gleiche Entfernung von a, b und c, d. h. m ist Mittelpunkt eines Kreises, dessen Peripherie durch a, b und c geht.

§ 55. Lehrsatz. In jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben (Fig. 111).

Beweis. Man halbiere zwei Winkel des Dreiecks, z. B. $\sphericalangle$ a und $\sphericalangle$ c. Vom Schnittpunkt o der Halbierungslinien fälle man die Senkrechten o d, o e, o f auf die Seiten des Dreiecks a b c, so ist 1. $\triangle$ a o f $\cong$ a o d (§ 35), denn $\sphericalangle$ f a o = d a o, $\sphericalangle$ a d o = a f o = 1 R, und a o = a o, also o d = o f; 2. $\triangle$ c o f $\cong$ c o e (§ 35), denn $\sphericalangle$ f c o = e c o, $\sphericalangle$ o f c = o e c = 1 R und o c = o c, folglich o f = o e. Es hat also o gleiche senkrechte Entfernung von den drei Seiten des Dreiecks, d. h. o ist Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises.

Von den Vielecken.

§ 56. Ein von mehr als vier Seiten begrenzter Teil der Ebene heißt Vieleck (§ 25).

Befindet sich innerhalb eines Vielecks ein Punkt, der von den Ecken gleiche Entfernung hat, so läßt sich um das Vieleck ein Kreis beschreiben, der den genannten Punkt zum Mittelpunkt hat, und dessen Peripherie durch die Ecken des Vielecks geht.

Befindet sich innerhalb eines Vielecks ein Punkt, der von den Seiten gleichen Abstand hat, so läßt sich in das Vieleck ein Kreis beschreiben, der

Digitized by Google

den genannten Punkt zum Mittelpunkt hat, und dessen Peripherie sämtliche Vieleckseiten berührt.

§ 57. Lehrsatz. Alle Winkel eines Vielecks zusammen genommen betragen $(2n-4)R$, wenn n die Anzahl der Seiten bedeutet.

Beweis. Verbindet man irgend einen Punkt im Vieleck mit sämtlichen Ecken, so erhält man so viele Dreiecke, als das Vieleck Seiten hat, mithin in diesem Falle n Dreiecke. Die Winkel eines Dreiecks betragen zusammen 2 R (§ 28), also die Winkel in den n Dreiecken zusammen 2 n R. Die Winkel um den angenommenen Punkt, welche einen Vollwinkel $= 360° = 4$ R ausmachen, gehören indes nicht zu den Vieleckswinkeln, woraus folgt, daß die Vieleckswinkel zusammen 2 n R weniger 4 R $= (2n-4)$ R betragen.

§ 58. Aus § 57 folgt, daß die Winkel eines Fünfecks $2 \times 5 - 4 = 6$ R, die Winkel eines Sechsecks $2 \times 6 - 4 = 8$ R, die Winkel eines Zehnecks $2 \times 10 - 4 = 16$ R u. s. w. ausmachen.

In einem regelmäßigen Vieleck (§ 25) sind alle Winkel einander gleich, also ist ein Winkel im regelmäßigen Fünfeck $= \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}$ R $= 108°$, im regelmäßigen Sechseck $= \frac{8}{6} = 1\frac{1}{3}$ R $= 120°$ u. s. w.

§ 59. Lehrsatz. Um jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein Kreis zeichnen (Fig. 53).

Beweis. Durch die drei Ecken a, b, d läßt sich ein Kreis legen (§ 54). Verbindet man den Mittelpunkt c dieses Kreises mit den übrigen Ecken, so folgt durch die Kongruenz der Dreiecke (§ 34), daß c auch von diesen Ecken gleiche Entfernung hat, d. h. daß der Kreis durch dieselben hindurchgeht.

§ 60. Lehrsatz. In jedes regelmäßige Vieleck läßt sich ein Kreis zeichnen (Fig. 53).

Beweis. Der Mittelpunkt c des dem Vieleck (§ 59) umschriebenen Kreises ist zugleich Mittelpunkt des einbeschriebenen Kreises, denn da die einzelnen Dreiecke a c b, b c d einander kongruent sind, so sind auch die von c auf die Seiten gefällten Höhen einander gleich.

§ 61. Lehrsatz. Die Seite des regelmäßigen Sechsecks ist gleich dem Halbmesser des um dasselbe beschriebenen Kreises (Fig. 54).

Beweis. Verbindet man den Kreismittelpunkt mit den Ecken des Sechsecks, so erhält man sechs kongruente Dreiecke (§ 36). Die sechs Winkel bei a betragen zusammen 360°, also jeder 60°. Da sämtliche Dreiecke gleichschenklig sind, denn die Kreishalbmesser sind ja gleich, so bleiben für je zwei Winkel an der Grundlinie noch $180° - 60° = 120°$; mithin hält jeder 60°. Die Dreiecke sind also gleichseitig (§ 31), d. h. die Seite des regelmäßigen Sechsecks ist gleich dem Kreishalbmesser.

Von der Ähnlichkeit der Figuren.

§ 62. Zwei gleichartige Größen (z. B. 2 Strecken oder 2 Gewichte u. s. w.) können auf zweierlei Arten mit einander verglichen werden. Man kann nämlich fragen: 1. um wie viel ist die eine größer als die andere, 2. wie vielmal so groß ist die eine als die andere. Bei der ersten Art der Vergleichung muß man die beiden Größen von einander abziehen, z. B. 6 kg weniger 2 kg, bei der zweiten Art beide Größen durch einander dividieren, z. B. 6 m : 2 m. Das Resultat einer solchen Vergleichung heißt Verhältnis und zwar ist 6 — 2 ein arithmetisches, 6 : 2 ein geometrisches Verhältnis.*

* Im folgenden ist unter Verhältnis stets ein geometrisches zu verstehen.

Digitized by Google

§ 63. Setzt man zwei gleiche Verhältnisse einander gleich, z. B. $16 : 4 = 20 : 5$, so erhält man eine Proportion. 16 und 5 heißen die äußeren, 4 und 20 die inneren Glieder der Proportion.

In einer richtigen Proportion ergibt die Multiplikation der inneren Glieder dasselbe Resultat wie die Multiplikation der äußeren Glieder. Denn ersetzt man das Divisionszeichen durch einen Bruchstrich, so folgt $\frac{16}{4} = \frac{20}{5}$. Hauptnenner 4×5, also $\frac{16 \times 5}{4 \times 5} = \frac{20 \times 4}{4 \times 5}$. Gleiche Brüche mit gleichem Nenner haben gleiche Zähler, mithin $16 \times 5 = 20 \times 4$. Setzt man statt der bestimmten Zahlen 16, 4, 20, 5 die allgemeinen a, b, c, d, so findet man aus $a : b = c : d$ in gleicher Weise $a \times d = b \times c$, wodurch der Nachweis für alle beliebigen Zahlen erbracht ist.

Zu drei gegebenen Gliedern einer Proportion kann man leicht das fehlende vierte (die vierte Proportionale) finden. Es sei z. B. gegeben $2 : 5 = 6 : x$. Die Multiplikation der innern Glieder giebt $5 \times 6 = 30$; die Multiplikation der äußeren Glieder $2 \times x$; also $2 \times x = 30$; $1 \times x = \frac{30}{2} = 15$.

§ 64. Lehrsatz. Trägt man auf einem Schenkel eines Winkels mehrere gleiche Teile ab und zieht durch die Teilpunkte Parallele, so begrenzen diese auch auf dem andern Schenkel gleiche Teile.

Beweis. Es sei (Fig. 85) $a1 = 12 = 23$ u. s. w. und $1d \parallel 2e \parallel 3f$ u. s. w. Zieht man $d1 \parallel 12$, so ist Dreieck $ad1 \cong del$ (§ 35), denn $a1 = 12 = d1$, $\sphericalangle a = \sphericalangle lde$, $\sphericalangle ad1 = \sphericalangle del$ als Gegenwinkel an Parallelen. Mithin ist $ad = de$. Ebenso zeigt man $de = ef$ u. s. w.

§ 65. Lehrsatz. Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallele, so stimmen die erhaltenen Dreiecke in den Winkeln und im Verhältnisse entsprechender Seiten überein.

Beweis. Es sei $ed \parallel bc$ (Fig. 58), so ist $\sphericalangle a = a$, $\sphericalangle d = c$, $\sphericalangle e = b$ (§ 20). Kann man auf ab und ae m (5) und n (3) gleiche Teile abtragen, so verhält sich $ab : ae = m (5) : n (3)$. Zieht man durch alle diese Teilpunkte Parallele zu bc, so erhält man auf ac und ad m (5) und n (3) gleiche Teile (§ 64), also verhält sich $ac : ad = m (5) : n (3)$. Zieht man dagegen durch die Teilpunkte auf ab die Parallelen zu ac, so teilen diese bc und de in m (5) und n (3) gleiche Teile; also verhalten sich auch $bc : de = m (5) : n (3)$.

§ 66. Zwei Figuren heißen ähnlich, wenn sie übereinstimmen in den Winkeln und im Verhältnisse je zweier entsprechender Seiten. Ähnliche Figuren haben also gleiche Gestalt bei verschiedener Größe. Das Zeichen der Ähnlichkeit ist $\sim$.

§ 67. Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie übereinstimmen in zwei Winkeln.

Beweis. Es seien abc und ade (Fig. 58) die gegebenen Dreiecke und $\sphericalangle a = a$, $\sphericalangle d = c$. Legt man Dreieck ade so auf Dreieck abc, daß die Schenkel ad, ae des Winkels a auf die entsprechenden Schenkel ac und ab des ihm gleichen Winkels a im Dreieck abc fallen, so ist $de \parallel bc$, denn beide Geraden haben mit ac denselben Richtungsunterschied (§ 19). Die Dreiecke abc und aed sind also nach §§ 65 und 66 ähnlich.

§ 68. Lehrsatz. Zieht man in einem rechtwinkligen Dreiecke die Höhe, so verhält sich:

Digitized by Google

1. die ganze Hypotenuse zu einer Kathete wie diese Kathete zum anliegenden Abschnitt der Hypotenuse,
2. der eine Abschnitt der Hypotenuse zur Höhe wie die Höhe zum anderen Abschnitt der Hypotenuse (Fig. 60).

Beweis. 1. Das ganze Dreieck a c d ist jedem Teildreieck ähnlich, denn es sind rechtwinklige Dreiecke, die einen spitzen Winkel gemeinsam haben; so hat Dreieck a c d mit Dreieck a d b den Winkel m, mit Dreieck b c d den Winkel c gemein. Darum verhält sich nach § 67 a c : a d = a d : a b und a c : d c = d c : b c.

2. Dreieck a b d ähnlich b d c, denn beide Dreiecke stimmen mit dem ganzen Dreieck a d c (1), also auch unter sich in den Winkeln überein. Darum folgt:

$$a\,b : b\,d = b\,d : b\,c.$$

Multipliziert man die inneren und äußeren Glieder dieser Proportionen, so folgt:

$$1.\ \begin{cases} a\,d \times a\,d = a\,c \times a\,b, \\ d\,c \times d\,c = a\,c \times b\,c, \end{cases}$$
$$2.\quad b\,d \times b\,d = a\,b \times b\,c,$$

und man drückt demgemäß den Lehrsatz auch so aus:

Im rechtwinkligen Dreieck ist 1. das Kathetenquadrat gleich dem Rechtecke, gebildet aus der ganzen Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitte, 2. das Höhenquadrat gleich dem Rechtecke, gebildet aus den Abschnitten der Hypotenuse.

§ 69. Lehrsatz. Regelmäßige Figuren von gleicher Seitenzahl sind ähnlich.

Beweis. Zwei regelmäßige Figuren von gleicher Seitenzahl stimmen in den Winkeln überein (§ 25), und da sämtliche Seiten einer regelmäßigen Figur gleich sind, so haben je zwei Seiten beider Figuren dasselbe Verhältnis; folglich sind die Figuren ähnlich (§ 66).

Alle gleichseitigen Dreiecke, ebenso alle Quadrate, alle regelmäßigen Fünfecke u. s. w., auch alle Kreise sind ähnlich, denn zwei Kreise kann man als regelmäßige Vielecke von gleicher, jedoch sehr großer Seitenzahl auffassen.

Von der Maß- und Gewichts-Ordnung.

1. Die Grundlage des Maßes und Gewichtes ist das Meter mit seinen Teilen.

2. Als Urmaß gilt derjenige Platinstab, welcher im Besitze der Königl. preußischen Regierung sich befindet, im Jahre 1863 durch eine von dieser und der Kaiserlich französischen Regierung bestellte Kommission mit dem in dem Kaiserlichen Archive zu Paris aufbewahrten mètre des Archives verglichen und bei der Temperatur des schmelzenden Eises gleich 1,00000301 Meter befunden worden ist.

3. Es gelten folgende Maße:

A. Längenmaße:

Die Einheit bildet das Meter oder der Stab.
Der hundertste Teil des Meters heißt das Centimeter oder der Neuzoll.
Der tausendste Teil des Meters heißt das Millimeter oder der Strich.
Zehn Meter heißen das Dekameter oder die Kette.
Hundert Meter heißen das Hektometer.
Tausend Meter heißen das Kilometer.
Die Meile hat 7 500 Meter.

Digitized by Google

B. Flächenmaße:

Die Einheit bildet das Quadratmeter oder der Quadratstab.
Hundert Quadratmeter heißen das Ar.
Zehntausend Quadratmeter heißen das Hektar.

C. Körpermaße:

Die Einheit bildet das Kubikmeter oder der Kubikstab.

Der tausendste Teil des Kubikmeters heißt das Liter oder die Kanne. Das halbe Liter heißt der Schoppen.

Hundert Liter oder der zehnte Teil des Kubikmeters heißen das Hektoliter oder das Faß.

Fünfzig Liter sind ein Scheffel.

4. Als Urgewicht gilt das im Besitze der Königlich preußischen Regierung befindliche Platin-Kilogramm, welches mit Nr. 1 bezeichnet, im Jahre 1860 durch eine von der Königlich preußischen und der Kaiserlich französischen Regierung niedergesetzte Kommission mit dem in dem Kaiserlichen Archive zu Paris aufbewahrten kilogramme prototype verglichen und gleich 0,999999842 befunden worden ist.

5. Die Einheit des Gewichts bildet das Kilogramm (gleich zwei Pfund). Es ist das Gewicht eines Liters destillierten Wassers bei + 4 Grad des hundertteiligen Thermometers.

6. Das Kilogramm wird in 1000 Gramm geteilt mit decimalen Unter-Abteilungen.

Zehn Gramm heißen das Dekagramm oder das Neulot, hundert Gramm heißen das Hektogramm.

Der zehnte Teil eines Grammes heißt das Decigramm, der hundertste das Centigramm, der tausendste das Milligramm.

50 Kilogramm oder 100 Pfund heißen der Zentner.

1000 Kilogramm oder 2000 Pfund heißen die Tonne.

7. Ein von diesem Gewichte (Art. 6) abweichendes Medizinalgewicht findet nicht statt.

8. In betreff des Münzgewichts verbleibt es bei den im Artikel 1 des Münzvertrages vom 24. Januar 1857 gegebenen Bestimmungen.

9. Nach beglaubigten Kopieen des Urmaßes (Art. 2) und des Urgewichts (Art. 1) werden die Normalmaße und Normalgewichte hergestellt und richtig erhalten.

10. Zum Zumessen und Abwägen im öffentlichen Verkehr dürfen nur in Gemäßheit dieser Maß- und Gewichtsordnung gehörig gestempelte Maße, Gewichte und Wagen angewendet werden.

Der Gebrauch unrichtiger Maße, Gewichte und Wagen ist untersagt, auch wenn dieselben im übrigen den Bestimmungen dieser Maß- und Gewichts-Ordnung entsprechen. Die näheren Bestimmungen über die äußersten Grenzen der im öffentlichen Verkehr noch zu duldenden Abweichungen von der absoluten Richtigkeit erfolgen nach Vernehmung der Normal-Eichungs-Kommission durch den Bundesrat.

11. Bei dem Verkaufe weingeistiger Flüssigkeiten nach Stärkegraden dürfen zur Ermittelung des Alkoholgehaltes nur gehörig gestempelte Alkoholometer und Thermometer angewendet werden.

Digitized by Google

12. Der in Fässern zum Verkauf kommende Wein darf dem Käufer nur in solchen Fässern, auf welchen die den Rauminhalt bildende Zahl der Liter durch Stempelung beglaubigt ist, überliefert werden.

Eine Ausnahme hiervon findet nur bezüglich desjenigen ausländischen Weines statt, welcher in den Originalgebinden weiter verkauft wird.

13. Gasmesser, nach welchen die Vergütung für den Verbrauch von Leuchtgas bestimmt wird, sollen gehörig gestempelt sein.

14. Zur Eichung und Stempelung sind nur diejenigen Maße und Gewichte zuzulassen, welche den in Art. 3 und 6 dieser Maß- und Gewichts-Ordnung benannten Größen oder ihrer Hälfte sowie ihrem Zwei-, Fünf-, Zehn- und Zwanzigfachen entsprechen. Zulässig ist ferner die Eichung und Stempelung des Viertel-Hektoliters, sowie fortgesetzter Halbierungen des Liters.

15. Maße, Gewichte und Meßwerkzeuge, welche von einer Eichungsstelle des Bundesgebiets geeicht und mit dem vorschriftsmäßigen Stempelzeichen versehen sind, dürfen im ganzen Umfange des Bundesgebietes im öffentlichen Verkehr angewendet werden.

16. Diese Maß- und Gewichts-Ordnung tritt mit dem 1. Januar 1872 in Kraft.

Von der Berechnung des Umfanges der Figuren.

§ 70. Das Grundmaß des Längenmaßes heißt Meter; das Meter ist der vierzigmillionste Teil des Erdmeridians.*) Von ihm sind alle übrigen Maße, sogar die Gewichte abgeleitet. Alle übrigen Längenmaße sind entweder ein Teil oder ein Vielfaches vom Meter. Diejenigen Maße, welche ein Teil vom Meter sind, hat man mit den lateinischen Vorsilben Deci von decem = 10, Centi von centum = 100, Milli von mille = 1000 verbunden und dadurch Decimeter, Centimeter und Millimeter erhalten. Diejenigen Maße aber, welche ein Vielfaches vom Meter sind, hat man mit den griechischen Vorsilben Deka von deka = 10, Hekto von hekaton = 100 und Kilo von chilioi = 1000 verbunden und dadurch Dekameter, Hektometer und Kilometer erhalten. 10 Meter = 1 Dekameter, 100 Meter = 1 Hektometer und 1000 Meter = 1 Kilometer. 7,5 Kilometer oder 7500 Meter sind 1 Meile.

Abkürzungen für die Längenmaße.

Volle Bezeichnung:	Abgekürzte Bezeichnung:
Kilometer	km
Dekameter	dkm
Meter	m
Decimeter	dm
Centimeter	cm
Millimeter	mm

*) Meridian oder Mittagslinie eines bestimmten Ortes der Erdkugel ist derjenige Kreis, welcher durch jenen Ort und die beiden Pole geht. Im übertragenen Sinn heißt auf jeder Umdrehungsfläche eine ebene Kurve ein Meridian, wenn ihre Ebene durch die Drehachse geht.

Digitized by Google

Das metrische Längenmaß stellt sich übersichtlich so dar:

Meile, km	Kilomet., hm	Hektomet., dkm	Dekamet., m	Meter, dm	Decimeter, cm	Centimeter, mm	Millimeter,
1 =	7,5 =	75 =	750 =	7500 =	75000 =	750000 =	7500000
	1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000 =	1000000
		1 =	10 =	100 =	1000 =	10000 =	100000
			1 =	10 =	100 =	1000 =	10000
				1 =	10 =	100 =	1000
					1 =	10 =	100
						1 =	10

§ 71. In einer geradlinigen Figur findet man: 1) wenn die einzelnen Seiten gegeben sind, den Umfang durch Addieren der bekannten Stücke; 2) wenn der Umfang und alle Seiten bis auf eine gegeben sind, die fehlende Seite durch Abziehen aller bekannten Seiten vom Umfang.

Ist die geradlinige Figur regelmäßig, so erhält man den Umfang dadurch, daß man die Länge einer Seite mit der Seitenzahl multipliziert, und umgekehrt bei gegebenem Umfang eine Seite dadurch, daß man den Umfang durch die Seitenzahl dividiert.

§ 72. Schwieriger ist die Berechnung des Umfanges einer krummlinigen Figur. Um den Umfang der hier in Betracht kommenden krummlinigen Figur, des Kreises, zu finden, denkt man sich in und um einen Kreis regelmäßige Vielecke beschrieben. Man erkennt alsdann leicht, daß der Umkreis größer als der Umfang des ein- aber kleiner als der Umfang des umbeschriebenen Vielecks sein muß, und daß sich der Umkreis diesen Vielecken um so mehr anschmiegt, je größer die Seitenzahl derselben genommen wird. Zeichnet man in einen Kreis mit dem Durchmesser d ein regelmäßiges Sechseck, dessen Seite bekanntlich gleich dem Halbmesser (§ 61) ist, so findet man den Kreisumfang größer als $3 \times d$; zeichnet man um den Kreis ein Quadrat, dessen Seite, wie leicht ersichtlich, gleich d wird, so ist der Kreisumfang kleiner als $4 \times d$.

Kreise sind jedoch ähnliche Figuren (§ 69), folglich ist jeder Umkreis größer als das Dreifache, aber kleiner als das Vierfache seines Durchmessers. Genauere Rechnung — ganz genau läßt sich der Kreisumfang überhaupt nicht bestimmen — hat ergeben, daß der Umkreis das $\frac{22}{7} = 3{,}14$fache seines Durchmessers d ist. Die Zahl 3,14 bezeichnet man mit dem griechischen Buchstaben π (Pi). Demnach ist also ein Umkreis U mit dem Durchmesser d $U = d \times \pi = 2 \times r \times \pi$, da der Durchmesser doppelt so groß ist als der Radius r.

§ 73. Ist also der Durchmesser bekannt, so findet man den Umkreis, indem man den Durchmesser mit 22 multipliziert und durch 7 dividiert, oder indem man den Durchmesser mit 3,14 multipliziert.

Ist umgekehrt der Umkreis bekannt, so findet man den Durchmesser dadurch, daß man untersucht, wie oft $\frac{22}{7}$ in dem Umkreise enthalten ist, d. h. man multipliziert den Umkreis mit 7 und dividiert das Resultat durch 22, oder man dividiert den Umkreis durch 3,14.

§ 74. Jeder Kreisumfang wird in 360 Bogengrade geteilt. 360 Bogengrade haben mithin eine Länge von $\pi \times d = \frac{3{,}14 \times d}{\cancel{22}\ 7}$; ein Bogengrad ist also

Digitized by Google

gleich dem 360sten Teil der Länge $= \frac{3{,}14}{\frac{22}{7} \times 360} \times d$; und ein Bogen von 49 Bogengraden hat die 49fache Länge $= \frac{3{,}14}{\frac{22}{7} \times 360} \times d \times 49$.

§ 75. Ist also der Durchmesser und Centriwinkel eines Kreisbogens bekannt, so findet man die Bogenlänge, wenn man den ganzen Umkreis (§ 72) mit der Anzahl der Grade des Centriwinkels multipliziert und das Resultat durch 360 dividiert.

Ist umgekehrt die Bogenlänge und der Centriwinkel bekannt, so findet man den Umkreis dadurch, daß man die Bogenlänge mit 360 multipliziert und das Resultat durch die Anzahl der Grade des Centriwinkels dividiert. Aus dem Umkreise findet man den Durchmesser nach § 73.

Übungen.

§ 70. 1. 18 m 6 cm 9 mm sollen zu 15 m 3 cm 6 mm addiert werden. Man setzt die Zahlen nach ihrer verschiedenen Benennung wie beim Addieren einfach benannter Zahlen unter einander.

15 m 3 cm 6 mm
18 „ 6 „ 9 „
33 m 10 cm 5 mm.

Die Summe beträgt also 33 m 10 cm 5 mm.

2. Zu 51 m 2 mm sollen 18 m 14 cm addiert werden.

Wenn in einer Reihe keine cm oder mm angegeben sind, so werden die fehlenden Zahlen durch Nullen ersetzt.

51 m 0 cm 2 mm
18 „ 14 „ 0 „
69 m 14 cm 2 mm.

3. Zu 124,038 m sollen 16,15 m addiert werden.

124,038 m
16,15 „
140,188 m

4. Von 45 m 6 cm 4 mm sollen 18 m 8 cm 5 mm abgezogen werden.

45 m 6 cm 4 mm
18 „ 8 „ 5 „
26 m 97 cm 9 mm.

5. Von 436,302 m sollen 224,512 m abgezogen werden.

436,302 m
224,512 „
211,79 m.

6. Es soll das 15fache von 317,632 m genommen werden.

317,632 m
15
1588160
317632
4764,480 m.

Digitized by Google

7. 346,83 m sollen in 6 gleiche Teile geteilt werden.

346,83 m : 6 = 57,805 m.

30
46
42
48
48
3
0
30
30

8. Ein Garten hat eine derartige Lage, daß er auf drei Seiten, deren Längen 27 m 85 cm, 96 m 47 cm und 58 m 63 cm betragen, einzufriedigen ist. Wie viel laufende Meter eisernen Gitters sind hierzu erforderlich? Gitter = 182 m 95 cm.

9. Für einen Neubau sind die Dachrinnen und Abfallrohre zu beschaffen. Die einzelnen Dachlängen betragen 18 m 50 cm, 14 m 78 cm, 14 m 42 cm und 6 m 30 cm; die erforderlichen Abfallrohre sind 14 m 76 cm, 10 m 86 cm und 8 m 38 cm lang. Wie viel m Dachrinnen und wie viel m Abfallrohr macht dies? Dachrinnen = 54 m, Abfallrohr = 34 m.

10. In vier Straßen von 226,18 m, 148,45 m, 137,73 m und 119,84 m Länge sind beiderseits die Bordsteine zu erneuern. Wie viel laufende Meter sind hierzu erforderlich, wenn sich zeigt, daß 864,40 m alter Steine wiederum Verwendung finden können? Neue Steine = 400 laufende Meter.

11. Ein Haus ist auf Abbruch verkauft. In demselben befinden sich an Gasleitungsrohr 16 m 17 cm, zweimal 8 m 36 cm, dreimal 5 m 17 cm und endlich viermal 10 m 15 cm. Wie viel löst man für das Blei, wenn der laufende Meter durchschnittlich mit ℳ 0,45 bezahlt wird? Erlös = ℳ 40,05.

12. Ein Grundstück hat eine dreieckige Gestalt mit den Seiten 749,62 m, 237,88 m und 673,95 m. Wie groß ist der Umfang, und wie teuer stellt sich die Umzäunung, wenn je 10 laufende Meter mit ℳ 12 bezahlt werden? § 71.

Umfang = 1 661,45 m. Kosten = $\frac{1\,661{,}45 \times 12}{10}$ = ℳ 1 993,74.

13. Ein Bauplatz hat 18,50 m Länge und 12,50 m Tiefe. Wie teuer stellt sich der Aushub für das Fundament der Umfassungsmauern bei ℳ 0,70 für den laufenden Meter? Kosten = ℳ 43,40.

14. Wie viel laufende Meter Fußleisten sind für ein Zimmer von 6 m 50 cm Länge und 4 m 75 cm Tiefe erforderlich, wenn dasselbe 2 Thüren von je 1 m 50 cm Breite besitzt? Fußleisten = 19 m 50 cm.

15. Zur Umzäunung eines Platzes, der die Gestalt eines regelmäßigen Achtecks hat, braucht man 384 m Eisendraht, wenn derselbe dreifach herumgeführt wird. Wie lang ist eine Seite des Achtecks? Seite = $\frac{384}{3 \times 8}$ = 16 m.

16. Eine Säule hat 0,36 m Durchmesser. Wie groß ist der Umfang? § 73.

Umfang = $\frac{0{,}36 \times 22}{7}$ = 1,13 m.

Digitized by Google

17. Ein runder Platz, der 10 m Durchmesser hat, soll mit einem Gitter umgeben werden, dessen Stäbe von Mitte zu Mitte 0,15 m aus einander stehen. Wie viel Stäbe sind hierzu erforderlich? Umkreis $= \frac{10 \times 22}{7} = 31{,}428$ m; dies dividiert durch 0,15 giebt rund 210 Stäbe.

18. Eine Säule halte 1,2 m im Umfang; wie groß ist der Durchmesser? Durchmesser $= \frac{1{,}2 \times 7}{22} = 8{,}4 : 22 = 0{,}38$ m.

19. Ein Baumstamm hat 2,5 m Umfang; wie groß ist der Durchmesser? Durchmesser $= \frac{2{,}5 \times 7}{22} = 0{,}795$ m.

§ 75. 20. Wie lang ist ein Kreisbogen von 30°, wenn der Durchmesser 2,80 m beträgt? Bogen $= \frac{\overset{0{,}70}{\cancel{2{,}80}} \times 3{,}14 \times \overset{1}{\cancel{30}}}{\underset{3}{\cancel{360}}} = \frac{0{,}70 \times 3{,}14}{3} = 0{,}733$ m.

21. Wie lang ist ein Stichbogen von 120° bei 10 m Durchmesser? Stichbogen $= \frac{10 \times 3{,}14 \times \overset{1}{\cancel{120}}}{\underset{3}{\cancel{360}}} = \frac{10 \times 3{,}14}{3} = 10{,}46$ m.

22. Zu einem Kreisbogen von 3,14 m Länge gehört ein Centriwinkel von 60°. Wie groß ist der zugehörige Kreisdurchmesser? Durchmesser $= \frac{3{,}14 \times 360}{3{,}14 \times 60} = 6$ m.

23. Ein Stichbogen von 9,42 m Länge und einem zugehörigen Centriwinkel von 90° ist gegeben. Der Kreisdurchmesser ist zu ermitteln! Durchmesser $= \frac{9{,}42 \times 360}{3{,}14 \times 90} = 12$ m.

Von der Berechnung der Flächen.

§ 76. Bekanntlich ist das Quadrat ein Viereck, welches vier gleiche Seiten und vier rechte Winkel hat (§ 39). Das Quadrat, dessen eine Seite ein Meter, Centimeter u. s. w. lang ist, dient zum Ausmessen des Flächeninhalts anderer Figuren und heißt Quadratmeter, Quadratcentimeter u. s. w.

Die Bezeichnungen der metrischen Flächenmaße sind folgende:

Volle Bezeichnung:	Abgekürzte Bezeichnung:
Hektar	ha
Quadratdekameter oder Ar	a
Quadratmeter	qm
Quadratdecimeter	qdm
Quadratcentimeter	qcm
Quadratmillimeter	qmm

Digitized by Google

Das metrische Flächenmaß stellt sich übersichtlich so dar:

ha	a	qm	qdm	qcm	qmm
1 =	100 =	10000 =	1000000 =	100000000 =	10000000000
	1 =	100 =	10000 =	1000000 =	100000000
		1 =	100 =	10000 =	1000000
			1 =	100 =	10000
				1 =	100

§ 77. Den Inhalt einer Figur suchen, heißt die Anzahl von Flächeneinheiten (Ar, Quadratmeter u. s. w.) angeben, welche sie enthält.

§ 78. Lehrsatz. Der Inhalt eines Rechtecks, dessen Seiten m und n Längeneinheiten messen, beträgt $m \times n$ Flächeneinheiten (Fig. 66).

Beweis. Es sei Seite $ab = m$ (4) cm, Seite $ac = n$ (2) cm. Zieht man durch die Teilpunkte von a b zu a c die Parallelen, so zerfällt das Rechteck in m (4) Streifen. Zieht man alsdann durch die Teilpunkte auf a c die Parallelen zu a b, so zerfällt jeder Streifen in n (2) qcm, also die m (4) Streifen d. h. das ganze Rechteck in $m \times n$ (4×2) qcm.

Sind m und n keine ganzen Zahlen, sondern etwa $m = 4{,}25$ cm, $n = 2{,}9$ cm, so führt man als Längeneinheit nicht 1 cm, sondern $\frac{1}{100}$ cm ein, dementsprechend alsdann die zugehörige Flächeneinheit nicht ein Quadrat mit der Seite = 1 cm, sondern mit der Seite $= \frac{1}{100}$ cm ist.

Da eine Strecke beliebig genau ausgemessen werden kann, so folgt hieraus, daß auch ein Rechteck mit jeder gewünschten Genauigkeit auszumessen ist.

§ 79. Gewöhnlich wird der § 78 angeführte Satz folgendermaßen ausgesprochen:

Lehrsatz. Den Inhalt eines Rechtecks findet man, wenn man die Grundlinie g mit der Höhe h multipliziert. $J = g \cdot h$.

Hat indes die Grundlinie 6 cm, die Höhe 5 cm, so multipliziert man thatsächlich nicht 6 cm mit 5 cm — denn 2 benannte Zahlen (15 Pferde mal 7 Pferde) lassen sich nicht multiplizieren — sondern nur die Maßzahlen 6 und 5 und giebt dem Resultat eine ganz neue Benennung (Ar, Hektar), im vorliegenden Falle qcm.

§ 80. Lehrsatz. Den Inhalt eines Quadrates findet man, wenn man die Grundlinie a mit sich selbst multipliziert. $J = a \cdot a = a^2$ (sprich: a hoch 2 oder a im Quadrat) [Fig. 65].

Beweis. Das Quadrat ist ein Rechteck, in welchem die Grundlinie gleich der Höhe ist (§ 79).

§ 81. Lehrsatz. Den Inhalt eines Parallelogramms findet man, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multipliziert. $J = g \cdot h$ (Fig. 67).

Beweis. Zeichnet man über der Grundlinie $ab = g$ das Rechteck a b c f, welches mit a b c d die gleiche Höhe $bc = h$ hat, so ist Dreieck b c e $\cong$ a f d (§ 35), denn $ad = be$ (§ 40), $\sphericalangle f = \sphericalangle c = 1$ R (§ 39 3), $\sphericalangle fda = ceb$ (§ 20). Also Trapez a f e b weniger Dreieck a f d gleich Trapez a f e b weniger Dreieck b c e, d. h. Parallelogramm a b e d = Rechteck a b c f.

Digitized by Google

§ 82. **Lehrsatz.** Den Inhalt eines Dreiecks findet man, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe multipliziert. $J = g \cdot \frac{h}{2}$ (Fig. 37).

Beweis. Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich $g \cdot h$ (§ 81). Die Diagonale a d teilt das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke a c d und a d b (§ 40), also ist der Inhalt eines Dreiecks $= g \cdot \frac{h}{2}$.

§ 83. **Lehrsatz.** Den Inhalt eines Trapezes findet man, wenn man die beiden parallelen Seiten addiert und das Resultat mit der halben zugehörigen Höhe multipliziert. $J = (g + g_1) \frac{h}{2}$ (Fig. 31).

Beweis. Zieht man die Diagonale a d, so zerfällt das Trapez in zwei Dreiecke mit den Grundlinien $a b = g$, $c d = g_1$ und der gleichen Höhe h. Also ist der Inhalt des Trapezes gleich $g \cdot \frac{h}{2} + g_1 \cdot \frac{h}{2} = (g + g_1) \frac{h}{2}$ (§ 82).

§ 84. **Lehrsatz.** Den Inhalt eines Vierecks findet man, wenn man die von zwei gegenüberliegenden Ecken auf die Diagonale gefällten Höhen addiert und das Resultat mit der halben Diagonale multipliziert. $J = (h + h_1) \frac{g}{2}$ (Fig. 70).

Beweis. Zieht man die Diagonale b d, so entstehen zwei Dreiecke b a d und b c d mit den Höhen $a e = h$ und $c f = h_1$ und der gemeinsamen Grundlinie $b d = g$; also $J = h \frac{g}{2} + h_1 \frac{g}{2} = (h + h_1) \frac{g}{2}$ (§ 82).

Den Inhalt eines Vielecks findet man, wenn man dasselbe entweder in lauter Dreiecke (Fig. 53) oder in Dreiecke und Trapeze teilt (Fig. 71) und deren Inhalte addiert. Ein regelmäßiges Vieleck (Fig. 53, 54) zerlegt man in kongruente Dreiecke und multipliziert den Inhalt eines Dreiecks mit der Seitenzahl des Vielecks.

§ 85. **Lehrsatz.** Den Inhalt eines Kreises findet man, wenn man den Umkreis mit dem vierten Teile des Durchmessers multipliziert. $J = d \times \pi \times \frac{d}{4} = \frac{d^2 \times \pi}{4}$. (Sprich d im Quadrat mal $\frac{\pi}{4}$.)

Beweis. Zerlegt man den Kreis in sehr viele sehr kleine Kreisausschnitte, so kann man letztere als Dreiecke ansehen mit ungleichen Grundlinien und der gleichen Höhe $\frac{d}{2}$. Den Inhalt dieser Dreiecke findet man, wenn man die ungleichen Grundlinien sämtlich (wie in § 83) addiert und das Resultat mit der halben Höhe multipliziert. Die Grundlinien zusammengenommen ergeben jedoch den Umkreis $= d \times \pi$. Die halbe Höhe ist $\frac{d}{4}$, also $J = d \times \pi \times \frac{d}{4} = \frac{d^2 \times \pi}{4}$.

Weil indes $d = 2r$ ist, so ist $d \times d$, d. h. $d^2 = 2r \times 2r = 4 \times r^2$, folglich $J = \frac{4 \times r^2 \times \pi}{4} = r^2 \times \pi$.

Digitized by Google

§ 86. Lehrsatz. Den Inhalt eines Kreisausschnittes findet man, wenn man die zum Ausschnitt gehörige Bogenlänge mit dem vierten Teile des Durchmessers multipliziert. $J = \frac{d \times \pi \times x}{360} \times \frac{d}{4} = \frac{d^2 \times \pi \times x}{4 \times 360}$ (Fig. 74).

Beweis. Man zerlegt den Kreisausschnitt, wie in § 85 den ganzen Kreis, in sehr viele sehr kleine Dreiecke, die alle die Spitze in c haben, und deren Grundlinien zusammen den Bogen a b ausmachen. Der Bogen a b halte x Bogengrade, so hat er eine Länge von $\frac{d \times \pi \times x}{360}$ (§ 74), und demnach ist (vergl. § 85) der Inhalt des Kreisausschnittes $J = \frac{d \times \pi \times x}{360} \times \frac{d}{4} = \frac{d^2 \times \pi \times x}{4 \times 360}$.

Setzt man $d = 2r$, so ist $d \times d = 2r \times 2r = 4 \times r^2$, also $J = \frac{4 \times r^2 \times \pi \times x}{4 \times 360} = \frac{r^2 \times \pi \times x}{360}$.

§ 87. Lehrsatz. Den Inhalt eines Kreisabschnittes findet man, wenn man vom Inhalte des Kreisausschnittes (Fig. 75) den Inhalt des Dreiecks b c d abzieht.

Wird keine große Genauigkeit verlangt, so darf man auch die Sehne b d (Fig. 75) mit $\frac{2}{3}$ der Pfeilhöhe a e multiplizieren (d. h. die Fläche als Parabelabschnitt [Fig. 289] auffassen).

§ 88. Lehrsatz*. Den Inhalt einer Ellipse findet man, wenn man das Produkt der Halbachsen $a \times b$ mit π multipliziert. $J = a \times b \times \pi$ (Fig. 130).

Übungen.

1. Es sollen 420 qm 45 qdm 6 qmm zu 130 qm 66 qdm 15 qmm addiert werden. § 76.

130 qm	66 qdm	15 qmm
420 „	45 „	6 „
551 qm	11 qdm	21 qmm.

2. Von 220,805 qm sollen 135,805 qm abgezogen werden.

220,305 qm
135,805 „
84,5 qm.

Es soll das 6fache von 34,62 qm genommen werden.

34,62 qm
6
207,72 qm

*) a b (Fig. 130) heißt die große, c d die kleine Achse der Ellipse, e und f sind die Brennpunkte. Dieselben sind von dem Mittelpunkte um so weiter entfernt, je kürzer die kleine Achse im Vergleich zur großen ist.

Die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich daraus, daß ein Kreis mit dem Radius b als Projektion einer Ellipse mit den Achsen a, b aufgefaßt werden kann.

Digitized by Google

4. Es sollen 349,65 qm durch 27 dividiert werden.

$$349{,}65 \text{ qm} : 27 = 12{,}95 \text{ qm}.$$

27

79
54

256
243

135
135
---

§§ 79 u. 80. 5. Es hält die Grundlinie eines Rechtecks 6,5 m, die Höhe 8,3 m; wie viel beträgt der Flächeninhalt?

6,5
8,3

195
520

Inhalt = 53,95 qm.

6. Es hält die Grundlinie eines Rechtecks 3 m 7 cm, die Höhe 5 m 3 mm; wie groß wird der Flächeninhalt sein?

3,07
5,003

921
153500

Inhalt = 15,35921 qm = 15 qm 35 qdm 92 qcm 10 qmm.

7. Ein Brett ist 4 m 6 cm lang und 45 cm breit; wie viel Quadratmeter enthält dasselbe?

4,06
0,45

Inhalt = 1,827 qm.

8. Ein Mauerstein, dessen Länge 25 cm, dessen Breite 12 cm beträgt, enthält wie viel Quadratcentimeter? Inhalt = $25 \times 12 = 300$ qcm.

9. Ein Zimmer ist 5,15 m lang und 4,12 m breit; wie viel Quadratmeter enthält dasselbe? Bodenfläche = $5{,}15 \times 4{,}12 = 21{,}218$ qm.

10. Ein Saal, der 12 m lang und breit ist, soll mit Parketttafeln ausgelegt werden; wie viel Quadratmeter hat der Saal, und wie viel Tafeln sind erforderlich, wenn jede Parketttafel 3969 qcm enthält? Saalfläche = 144 qm. Man macht die 144 qm zu Quadratcentimetern, dividiert die erhaltene Zahl durch 3969, was rund 363 Tafeln ergiebt.

11. Ein Saal, der 9,24 m lang und 5,15 m breit ist, soll mit Brettern gedielt werden; wie viel Bretter werden dazu erforderlich sein, wenn jedes Brett 4,62 m lang und 44 cm breit ist? Stückzahl = 24.

Digitized by Google

Man berechnet erst den Quadratinhalt des Saales, welcher = 47,586 qm ist, dann berechnet man den Quadratinhalt eines Brettes, welcher = 2,0328 qm ist. Dividiert man den Inhalt des Saales durch den Inhalt eines Brettes, so erhält man $23\frac{2079}{5082}$, rund 24 Stück.

12. Wie viel Ziegel- oder Backsteine sind zu einem Quadratmeter Mauer erforderlich, wenn diese einen halben Stein stark werden soll und der Stein 25 cm lang, $6\frac{1}{2}$ cm hoch ist und die Kalkfuge 1 cm stark gemacht wird? Anzahl = 51 bis 52 Stück. Die Kalkfuge wird nur für 2 Seiten des Steines berechnet, für eine Lagerfuge und eine Stoßfuge. Es wird daher die Länge des Steines nebst der Kalkfuge = 26 cm mit der Höhe nebst der Kalkfuge = $7\frac{1}{2}$ cm multipliziert und ein Quadratmeter durch dieses Produkt dividiert.

$$26 \times 7\tfrac{1}{2} = 195;\ 10000 : 195 = 51\tfrac{55}{65},\ \text{rund } 52 \text{ Stück.}$$

13. Wie viel Steine sind zu einer Mauer erforderlich, welche 4,3 m lang und 3,6 m hoch ist, wenn diese einen halben Stein stark werden soll, der Stein 25 cm lang, $6\frac{1}{2}$ cm hoch ist und die Kalkfuge 1 cm stark gemacht wird? Anzahl der Steine = 794.

Man berechnet erst den Quadratinhalt der Mauer, dann den eines Steines nebst Kalkfuge; dividiert man alsdann den Inhalt der Mauer durch den Inhalt eines Steines, so erhält man 794, und dieses ist die Anzahl der Steine, welche zu der Mauer erforderlich sind.

Zu einer 1 Stein starken Mauer gehört das Doppelte an Steinen, folglich 1588 Stück, zu einer $1\frac{1}{2}$ Stein starken Mauer das Dreifache, also 2382 Stück u. s. w.

14. Eine Dachfläche von 14 m Länge und 8 m Breite soll mit Zinktafeln gedeckt werden, welche 1 m breit und 2 m lang sind; wie viel solcher Tafeln werden hierzu erforderlich sein?

Man berechnet erst den Quadratinhalt des Daches, welcher $14 \times 8 =$ 112 qm ist; dann den Inhalt einer Tafel $= 1 \times 2 = 2$ qm. Dividiert man den Quadratinhalt des Daches durch den einer Tafel, so erhält man $112 : 2 = 56$, die Anzahl der zu der Dachfläche erforderlichen Zinktafeln.

Da die Zinktafeln aber bei der Deckung nicht neben, sondern über einander liegen, so muß der Verlust, welcher hierdurch entsteht, und der sich nach der anzuwendenden Deckungsmethode richtet, pro Tafel berechnet und mit der Anzahl der Tafeln multipliziert werden. Ergiebt sich hierdurch der Quadratinhalt von 3 bis 5 Tafeln, so werden diese zu den bereits erhaltenen Tafeln hinzugerechnet.

15. Ein Parallelogramm hat eine Grundlinie von 3,4 m und eine Höhe von 2,6 m; wie groß ist der Inhalt? Inhalt $= 3{,}4 \times 2{,}6 = 8{,}84$ m. § 81.

16. Ein Hofraum hat die Gestalt eines Parallelogramms, dessen Grundlinie 25,80 m und dessen Höhe 34,50 m beträgt. Wie teuer stellt sich die Überliefung (Befahren mit Kies), wenn für den Quadratmeter ℳ 0,05 gerechnet werden? Kosten $= 25{,}8 \times 34{,}5 \times 0{,}05 = 44{,}505 =$ ℳ 44,51.

17. Ein Ackerstück von der Form eines Parallelogramms, dessen Grundlinie 98,7 m und dessen Höhe 48,4 m beträgt, soll gegen ein rechteckiges Stück von 56,4 m Breite vertauscht werden; wie lang ist letzteres? Länge $= \frac{98{,}7 \times 48{,}4}{56{,}4} = 84{,}70$ m.

Digitized by Google

§ 82. 18. In dem Dreieck a b c (Fig. 68) sei a b = 5,7 m und d c = 3,5 m; wie groß ist der Inhalt? Inhalt $= \frac{5{,}7 \times 3{,}5}{2} = 9{,}975$ qm.

19. Trifft bei einem Dreieck die Höhe aus der Spitze nicht auf die Grundlinie, wie in Figur 21, so muß die Grundlinie a b verlängert werden; zieht man durch c die Senkrechte auf a b, so ist d c die Höhe des Dreiecks. Wenn a b 5,3 m, c d 6,4 m beträgt, wie groß ist dann der Inhalt des Dreiecks a b c? Inhalt $= \frac{5{,}3 \times 6{,}4}{2} = 5{,}3 \times 3{,}2 = 16{,}96$ qm.

20. Wie viel Steine sind zu dem Giebel a b c (Fig. 68) erforderlich, wenn die Giebelbreite a b = 14 m, die Höhe c d = 7 m ist und die Mauer einen Stein stark werden soll, der Stein 12 cm breit, 6½ cm dick ist, und die Kalkfuge 1 cm stark gemacht wird? Anzahl = 5026 Stück.

Man berechnet erst den Quadratinhalt des Giebels, dann den eines Steines nebst Kalkfuge. Der Inhalt des Giebels beträgt 49 qm und der eines Steines nebst Fuge 97,5 qcm; macht man die 49 qm zu Quadratcentimetern, so erhält man 490000 qcm, was, durch 97,5 oder 97½ dividiert, 026 Steine giebt.

21. Wie viel Quadratmeter Schalbretter sind zu einer Walmfläche erforderlich, wenn die Giebelbreite zu 12 m und die Länge des Mittelsparrens zu 3,5 m angenommen ist? Anzahl $= \frac{12 \times 3{,}5}{2} = 6 \times 3{,}5 = 21$ qm.

§ 83. 22. Den Inhalt eines Paralleltrapezes zu bestimmen, wenn die parallelen Seiten (Fig. 69) b c = 6,8 m, a d = 4,5 m und die Höhe a e = 3,8 m ausmachen.

Man addiert zunächst die beiden parallelen Seiten 6,8 m + 4,5 m = 11,3 m und erhält alsdann J $= \frac{11{,}3 \times 3{,}8}{2} = 11{,}3 \times 1{,}9 = 21{,}47$ qm.

23. Eine Dachfläche von der Form eines Trapezes hat eine Höhe von 12,50 m, eine Firstlänge von 25 m und eine untere Kante von 35 m. Dieselbe soll mit Ziegeln von 25 cm Länge und 15 cm Breite so belegt werden, daß letztere mit ¾ ihrer Größe sich decken. Wie viel Ziegel sind hierzu erforderlich?

Größe der Dachfläche $= \frac{(25 + 35) \times 12{,}50}{2} = \frac{60 \times 12{,}50}{2} =$

$30 \times 12{,}50 = 375$ qm. Größe eines Ziegels $25 \times 15 = 375$ qcm. Dividiert man die Größe der Dachfläche durch die Größe eines Ziegels, 3750000 qcm : 375 qcm = 10000, so erhält man die Anzahl Ziegel, falls sie nicht über einander fallen. Da jedoch sich die Ziegel mit ¾ ihrer Größe decken, also nur ¼ sichtbar ist, so braucht man die vierfache Anzahl, also 40000 Ziegel.

§ 84. 24. Den Inhalt des Vierecks a b c d (Fig. 70) zu berechnen, wenn b d = 20,50 m, a e = 4,80 m und c f = 7,20 m beträgt.

Die Diagonale b d teilt das Viereck in zwei Dreiecke mit gemeinsamer Grundlinie b d. Man addiert deshalb erst die ungleichen Höhen und multipliziert dieses Resultat mit der halben gemeinsamen Grundlinie. a e + c f = 4,80 m + 7,20 m = 12 m. J $= \frac{12 \times 20{,}50}{2} = 6 \times 20{,}50 = 123$ qm.

Digitized by Google

25. Wie viel Ar enthält die Fläche Fig. 71, wenn die beigefügten Zahlen Meter bedeuten?

I. $= \frac{20{,}50 \times 22}{2} = 20{,}50 \times 11 = 225{,}5$ qm; II. $= \frac{(22+16) \times 10}{2} = \frac{38 \times 10}{2} = 19 \times 10 = 190$ qm; III. $= \frac{(16+18) \times 27}{2} = \frac{34 \times 27}{2} = 17 \times 27 = 459$ qm; IV. $= \frac{(18+12) \times 30{,}50}{2} = \frac{30 \times 30{,}50}{2} = 15 \times 30{,}50 = 457{,}5$ qm; V. $= \frac{12 \times 8}{2} = 6 \times 8 = 48$ qm; VI. $= \frac{13(17{,}50+8)}{2} = \frac{13 \times 25{,}5}{2} = \frac{331{,}5}{2} = 165{,}75$ qm; VII. $= \frac{(14+13) \times 28}{2} = \frac{27 \times 28}{2} = 27 \times 14 = 378$ qm; VIII. $= \frac{(24+14) \times 22}{2} = \frac{38 \times 22}{2} = 38 \times 11 = 418$ qm; IX. $= \frac{20{,}50 \times 24}{2} = 20{,}50 \times 12 = 246$ qm; J $= 2587{,}75$ qm $=$ 25 a 87 qm 75 qdm.

26. Wie groß ist der Quadratinhalt des regelmäßigen Sechsecks (Fig. 72), wenn die Seite a b $= 15$ cm und die Höhe c d $= 12$ cm ist? Dreieck a d b $= \frac{12 \times 15}{2} = 6 \times 15 = 90$ qcm. Sechseck $=$ 90 qcm $\times$ 6 $= 540$ qcm.

27. Es sei der Durchmesser eines Kreises 12 m, wie groß wird der Flächeninhalt sein? Da der Durchmesser $= 12$ m ist, so ist der Halbmesser $= 6$ m, und man findet den Inhalt am schnellsten nach der Formel $r^2 \pi$. Setzt man $\pi = \frac{22}{7}$, so ist der Inhalt $= 6 \times 6 \times \frac{22}{7} = 113{,}14$ qm; setzt man $\pi = 3{,}14$, so folgt Inhalt $= 6 \times 6 \times 3{,}14 = 113{,}04$ qm. § 85.

28. Wie groß ist der Quadratinhalt eines Kreises, wenn der Durchmesser 2,5 m beträgt?

Da der Durchmesser ohne Vermehrung der Stellenzahl nicht durch 2 teilbar ist, so rechnet man schneller nach der Formel $\frac{d^2 \pi}{4}$. J $= \frac{2{,}5 \times 2{,}5 \times 22}{4 \times 7} = 4{,}91$ qm.

29. Wie groß ist der Quadratinhalt einer runden Tischplatte, wenn der Durchmesser 1,4 m beträgt? Inhalt $= r^2 \pi = \frac{0{,}7 \times 0{,}7 \times 22}{7} = 1{,}54$ qm.

30. Wie groß ist der Quadratinhalt des Ringes (Fig. 73), wenn der Durchmesser a b 3 m und die Breite a c des Ringes 0,5 m beträgt?

Man berechnet erst den Inhalt des äußern und dann den des inneren Kreises und zieht den letzteren vom ersteren ab.

Der Halbmesser des äußeren Kreises ist $= 1{,}5$ m; also J $= \frac{1{,}5 \times 1{,}5 \times 22}{7} = 7{,}07$ qm. Der Halbmesser des inneren Kreises ist $= 1$ m; also J $= \frac{1 \times 1 \times 22}{7}$

Digitized by Google

$= 3{,}14$ qm. 3,14 qm von 7,07 qm abgezogen, giebt: 3,93 qm, und dieses ist der Inhalt des Ringes.

§ 86. 31. Den Flächeninhalt des Kreisausschnittes (Fig. 74) zu finden, wenn der Winkel c 45 Grad und der Halbmesser a c des Kreises 1,4 m hat.

Der Inhalt des Kreisausschnittes ist $= \frac{1{,}4 \times 1{,}4 \times 22 \times 45}{7 \times 360} =$

$\frac{0{,}2 \times 1{,}4 \times 22}{8} = 0{,}1 \times 0{,}7 \times 11 = 0{,}77$ qm.

§ 87. 32. Den Flächeninhalt eines Kreisabschnittes a b e d zu bestimmen (Fig. 75), wenn der Halbmesser b c = 2 m und der Winkel b c d = 90° ist.

Inhalt des Kreisausschnittes $= \frac{2 \times 2 \times 3{,}14 \times 90}{360} = 3{,}14$ qm.

Inhalt des Dreiecks b c d $= \frac{\text{b c} \times \text{c d}}{2} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ qm. Inhalt des Kreisabschnittes $= 3{,}14$ qm weniger 2 qm $= 1{,}14$ qm.

33. Den Flächeninhalt des Kreisabschnittes a b e d (Fig. 75) aus der Sehne b d und der Pfeilhöhe a e zu bestimmen, wenn b d = 11,25 m und a e = 3 m ist. Inhalt $= \text{b d} \times \frac{2}{3}\,\text{a e} = 11{,}25 \times 2 = 22{,}5$ qm.

34. Wie groß ist die Öffnung des Fensters a b d e c (Fig. 76), wenn dieses nach dem Stichbogen c e d überwölbt ist? Die Höhe a c sei = 2 m, die Weite c d = 1,3 m, die Pfeilhöhe e f des Stichbogens = 0,21 m.

Der Inhalt des Rechtecks ist = 2,6 qm und der des Stichbogens nach 33 = 0,182 qm, beides addiert = 2,782 qm.

35. Den Flächeninhalt des gotischen Bogens (Fig. 80) h f i zu finden, wenn die Weite h i = 3,8 m, die Höhe g f = 4,1 m, die Pfeilhöhe k l = 0,3 m und die Länge der Sehne h f = 4,5 m ist.

Man berechnet den Inhalt des Dreiecks h i f, welcher $= \frac{3{,}8 \times 4{,}1}{2} =$ $1{,}9 \times 4{,}1 = 7{,}79$ qm ist, dann den Inhalt der beiden Kreisabschnitte $= 2 \times 0{,}3 \times 4{,}5 \times \frac{2}{3} = 1{,}80$ qm. Hierzu wird der Inhalt des Dreiecks addiert: $7{,}79 + 1{,}80 = 9{,}59$ qm.

§ 88. 36. Den Flächeninhalt einer Ellipse (Fig. 77) zu finden, wenn die große Achse = 1,2 m, die kleine Achse = 0,8 m ist. Inhalt $= 0{,}6 \times 0{,}4 \times 3\frac{1}{7}$ $= 0{,}754$ qm.

37. Wie groß ist der Flächenraum des Gurtbogens a d f e (Fig. 78), wenn die vorspringenden Pfeiler a b = 0,3 m, die Spannung b c = 4,2 m, die Höhe l i = 2,4 m, h i = 0,7 m und die Höhe k i des gedrückten Bogens = 1,2 m ist?

Man berechnet erst das Rechteck a d f e $= 4{,}8 \times 3{,}1 = 14{,}88$ qm; dann das Rechteck b g h c $= 4{,}2 \times 1{,}2 = 5{,}04$ qm, sowie die halbe Ellipse g i h k $= 2{,}1 \times 0{,}3 \times 3{,}14 = 1{,}98$ qm. Hierauf addiert man den Inhalt des Rechtecks b g h c zu dem der halben Ellipse g i h k $= 5{,}04 + 1{,}98$ $= 7{,}02$ qm; diese Summe wird von dem Inhalt des Rechtecks a d f e abgezogen, und es ergiebt sich als Inhalt des Gurtbogens 7,86 qm.

Digitized by Google

Von dem Ausziehen der Quadratwurzel.

§ 89. Wenn aus einer Zahl die Quadratwurzel ausgezogen werden soll, so muß man diejenige Zahl suchen, welche, mit sich selbst multipliziert, die gegebene Zahl hervorbringt. Ist z. B. die gegebene Zahl $= 64$, so ist die Quadratwurzel hiervon die Zahl 8, weil $8 \times 8 = 64$ ist. Diejenigen Zahlen, aus denen sich die Quadratwurzel nicht ohne Rest ausziehen läßt, heißen unvollkommene Quadratzahlen; so sind z. B. 18, 26, 38, 42 u. s. w. unvollkommene Quadratzahlen.

Das Quadrat der Zahlen von 1 bis 9 kann aus nicht mehr als 2 Ziffern bestehen, weil 10, die erste zweiziffrige Zahl, nur 100 zum Quadrat hat. Das Quadrat einer zweiziffrigen Zahl kann nicht mehr als 4 Ziffern enthalten, denn 100 giebt zum Quadrat erst 10 000. Demnach hat keine Quadratzahl mehr Ziffern als das Doppelte ihrer Wurzelzahl.

§ 90. Wenn man eine Zahl, z. B. 13 in die beiden Posten 10 und 3. — Zehner, Einer — zerlegt, so besteht das Quadrat dieser Zahl aus 1) dem Quadrat der ersten Zahl 10, 2) dem doppelten Produkte, welches entsteht, wenn man die erste Zahl 10 mit der zweiten 3 multipliziert, und 3) dem Quadrat der zweiten Zahl 3. Es ist das Quadrat von der Zahl $10 = 100$, das doppelte Produkt der Zahlen $10 \times 3 = 60$ und das Quadrat von $3 = 9$; addiert man die drei Posten, so erhält man $100 + 60 + 9 = 169$, und dieses ist das Quadrat der Zahl 13.*)

Denn es ist 13

$\times 13$

9 = Quadrat von 3

30
30 } = doppeltes Produkt von 10×3

100 = Quadrat von 10

169

oder mit Weglassung der Nullen

13

$\times 13$

39

13

169

§ 91. Will man umgekehrt aus 169 die Quadratwurzel ziehen, so zerlegt man die Zahl, von den Einern nach links und rechts gehend, in Gruppen von je 2 Ziffern 1'69, da nach § 89 beim Quadratwurzelziehen je zwei Ziffern eine ergeben, und subtrahiert von 1'69 1) das Quadrat von $10 = 100$ 2) das doppelte Produkt von $10 \times 3 = 60$ 3) das Quadrat von $3 = 9$; also

13

$\sqrt{1'69}$

$10^2 = 100$

$69 : 20 (= 2 \times 10)$

$2 \times 10 \times 3 = 60$

9

$3^2 = 9$

0

oder mit Weglassung der Nullen

13

$\sqrt{1'69}$

$1^2 = 1$

$6 : 2 (= 2 \times 1)$

$2 \times 1 \times 3 = 6$

9

$3^2 = 9$

0

*) Die graphische Darstellung giebt folgendes Bild: Man zeichne über der Strecke F C + C A (Fig. 40) = 10 mm + 3 mm das Quadrat A D E F, und ziehe durch C zu A D, durch B zu A F die Parallele, so besteht das ganze Quadrat A D E F aus 1) dem Quadrat C I L F = 100 qmm, 2) den beiden Rechtecken A B I C und I K E L = $2 \times 10 \times 3$ qmm, und 3) dem Quadrat B D K I = 9 qmm; d. h. A D E F = 100 + 60 + 9 = 169 qmm.

Digitized by Google

Einfach ist das Bestimmen und Abziehen des $1^2 = 1$, schwieriger jedoch die Ermittelung des doppelten Produktes $2 \times 1 \times 3 = 6$, weil die Ziffer 3 noch unbekannt ist. Um diese Ziffer 3 zu erhalten, ist die Aufgabe zu lösen: $2 \times 1 \times ? = 6$, worauf uns durch Division die Antwort wird: $6 : (2 \times 1) = 3$.

Übungen.

1. Die Quadratwurzeln aus den Zahlen 2025 und 0,5776 sind auszuziehen.

a)
```
          4  5
       √20'25
   4² = 16
   ------
     42 : 8 (= 2 × 4). Um die zweite Ziffer 5 zu ermitteln, ist
2 × 4 × 5 = 40        die Aufgabe zu lösen: 2 × 4 × ? = 42.
   ------             Antwort: 42 : (2 × 4) = 5.
     25
   5² = 25  Das Quadrat der zweiten Ziffer 5.
   ------
      0
```

b)
```
        0,76
     √0',57'76
   7² = 49      Das nächste Quadrat an 57 ist 7² = 49.
   ------
     87 : 14 (= 2 × 7). Um die Ziffer 6 zu bestimmen, ist die
2 × 7 × 6 = 84        Aufgabe zu lösen: 2 × 7 × ? = 87.
   ------             Antwort: 87 : 14 = 6.
     36
   6² = 36  Das Quadrat von 6.
   ------
      0
```

2. Die Quadratwurzel aus 69 696 zu ziehen.

Ist die Zahl, aus welcher die Quadratwurzel ermittelt werden soll, mehr als vierstellig, so verfährt man ähnlich; nur faßt man bei Bestimmung des doppelten Produktes die schon vorhandenen Ziffern als zusammengehörig.

```
          2  6  4
       √6'96'96
   2² = 4       Das nächste Quadrat an 6 ist 2² = 4.
   ------
     29 : 4 (= 2 × 2). Um die zweite Ziffer 6 zu bestimmen, ist
2 × 2 × 6 = 24        der Wert des doppelten Produktes 2 × 2 × ? = 29
   ------             zu ermitteln; Antwort 29 : 4 = 6.*)
     56
   6² = 36  Das Quadrat von 6.
   ------
     209 : 52 (= 2 × 26). Um die dritte Ziffer 4 zu finden,
2 × 26 × 4 = 208      löst man die Aufgabe 2 × 26 × ? = 209;
   ------             Antwort 209 : 52 = 4.
     16
   4² = 16
```

3. Ziehe die Quadratwurzel aus 292681; 390625; 484416; 0,535824; 0,023716; 0,00088209. Antwort: 541; 625; 696; 0,732; 0,154; 0,0297.

*) Das Resultat ist eigentlich 7, da aber 29 weniger 28 nur 1 zum Rest läßt, so wäre $7^2 = 49$ von 16 (anstatt 56) abzuziehen, was nicht möglich ist.

Digitized by Google

4. Ein Bauunternehmer wünscht zwei Bauplätze von rechteckiger Form — Bauplatz I 36 m lang, 24 m breit, Bauplatz II 35 m lang, 28 m breit — gegen eine quadratische Baufläche umzutauschen. Wie breit ist letztere? Breite der Fläche = 42,94 m.

5. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 50 und 24 cm; wie lang wird die Hypotenuse sein?

Das Quadrat der Hypotenuse ist ebenso groß als das Quadrat der beiden Katheten zusammen genommen; man erhebt also 50 und 24 ins Quadrat und addiert, wodurch man das Quadrat der Hypotenuse erhält. Die Quadratwurzel aus dieser Zahl ist die wirkliche Länge der Hypotenuse.

Es giebt das Quadrat von 24 = 576 und das Quadrat von 50 = 2500; beides addiert = 3076 qcm. Länge der Hypotenuse = $\sqrt{3076}$ = 55,46 cm.

6. Ein Hofraum von quadratischer Form ist 25 m lang. Wie groß ist die Entfernung zweier gegenüberliegender Ecken? Entfernung = 35,35 m.

7. In dem Orte A schneiden sich zwei Fahrstraßen unter einem rechten Winkel. Auf der ersten Straße trifft man in einer Entfernung von 15,8 km den Ort B, auf der zweiten Straße liegt in einer Entfernung von 10,25 km der Ort C. Wie weit ist B von C entfernt? Entfernung B C = 18,833 km.

8. Eine Wiese von rechteckiger Gestalt ist 312,8 m lang und 125,6 m breit. Es ist durch dieselbe ein Weg zu führen, der zwei nicht benachbarte Ecken verbindet. Wie lang ist der Weg? Weg = 337,07 m.

9. Die Sparrenlänge eines Daches zu berechnen.

Will man die Länge der Sparren eines Daches finden, so addiert man das Quadrat der Höhe des Daches zu dem Quadrat der halben Tiefe des Gebäudes; die Wurzel aus dieser Zahl giebt die Länge des Sparrens.

Ist z. B. die Höhe des Daches 6 m und die halbe Tiefe des Gebäudes 8 m, so ist das Quadrat von 6 = 36, das Quadrat von 8 = 64, beides addiert giebt 100; zieht man aus 100 die Quadratwurzel, so erhält man 10 m als Länge des Sparrens.

Diese Rechnung findet Anwendung, wenn der Sparren bis zur vorderen Fläche des Gebäudes reicht; ist dies nicht der Fall, so nimmt man die Hälfte der Länge vom Ende des einen Zapfenlochs bis zum andern, wenn der First, wie dieses bei den regulären Dächern der Fall ist, in der Mitte des Gebäudes liegt. Bei Pultdächern nimmt man die ganze Tiefe des Gebäudes, da der Giebel derselben ein rechtwinkliges Dreieck bildet.

10. Ein kreisrunder Weiher hat 6644,24 qm Flächeninhalt. Welchen Durchmesser besitzt derselbe? Inhalt = $r^2 \pi$ = 6644,24; r^2 = 6644,24 : 3,14 = 2116; r = $\sqrt{2116}$ = 46; d = 92 m.

11. Welchen Durchmesser hat ein kreisrundes Fenster, das ebenso viel Licht einläßt wie ein rechteckiges von 0,75 m Breite und 1,20 m Höhe? Durchmesser = 1,07 m.

12. Aus einer kreisförmigen Scheibe von 530,66 qcm Fläche ist ein Rechteck zu schneiden, dessen eine Seite 10 cm lang ist. Wie groß ist der Inhalt des Rechtecks? Kreisdurchmesser = 26 cm; Zweite Rechtecksseite = 24 cm; Inhalt = 240 qcm.

Digitized by Google

Von den planimetrischen Konstruktionen.

§ 92. Anmerkung. Unter planimetrischer Konstruktion versteht man die Darstellung der Linien und Winkel, sowie überhaupt aller planimetrischen Figuren auf der Bildfläche.

Die Ausführung geschieht vermittelst des Lineals und des Zirkels; die Linien werden teils punktiert, teils ausgezogen.

Die punktierten Linien dienen bei der Konstruktion dazu, das Verfahren anzugeben, welches zur Herstellung der Figuren führt. Durch die ausgezogenen Linien ist man im stande, die wahre Gestalt des gezeichneten Gegenstandes zu erkennen; es müssen daher beide Arten von Linien richtig angewendet werden, wenn die gezeichnete Figur deutlich hervortreten soll.

1. Aufgabe. Auf der Geraden a b in a die Senkrechte zu errichten (Fig. 81).

Man setzt in einen beliebigen Punkt c über a b die Zirkelspitze und beschreibt mit dem Radius c a einen Bogen, welcher a b in d schneidet. Dann legt man das Lineal an die Punkte d und c, schneidet den Bogen bei e und zieht die Senkrechte a e.

2. Aufgabe. Durch den Punkt a die Senkrechte zu der Geraden b c zu ziehen (Fig. 82).

Man schlägt um den gegebenen Punkt a mit beliebiger Zirkelöffnung einen Bogen, der die Gerade b c in den Punkten d, e trifft, zieht mit gleicher Zirkelöffnung um d und e die sich in f schneidenden Bogen und verbindet a mit f, so ist a f die gesuchte Senkrechte.

Man kann auch die beiden vorigen Aufgaben einfach mittels Lineals und rechtwinkligen Dreiecks lösen (Fig. 83).

Man legt das Lineal oder die Reißschiene an a b und an diese das Dreieck, schiebt letzteres so weit, daß die senkrecht stehende Seite durch den gegebenen Punkt c geht, und zieht an dieser Seite entlang die Senkrechte c d. Wenn man das Dreieck vor- oder rückwärts schiebt, kann man beliebig viele Senkrechte auf a b errichten, welche sämtlich zu c d parallel sein werden.

3. Aufgabe. Die Strecke a b (Fig. 84) in zwei gleiche Teile zu teilen oder zu halbieren.

Man schlägt um die Punkte a und b mit beliebiger, jedoch gleicher Zirkelöffnung Bogen, die sich in d und c schneiden; verbindet man c mit d, so ist a e = e b.

4. Aufgabe. Die Strecke a b (Fig. 85) in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zu teilen.

Soll die Strecke a b in acht gleiche Teile geteilt werden, so zieht man in einer beliebigen Richtung die Gerade a c, trägt mit einer beliebigen Zirkelöffnung von a aus auf a c acht gleiche Teile ab, verbindet den letzten Teilpunkt c mit b und zieht zu c b die Parallelen 7 k, 6 i, 5 h u. s. w. Hierdurch ist die Strecke a b in acht gleiche Teile geteilt.

Man kann auch eine Strecke vermittelst des Zirkels auf folgende Art annähernd in gleiche Teile teilen.

Soll z. B. eine Strecke in zwölf gleiche Teile geteilt werden, so teilt man dieselbe durch Probieren zuerst in zwei, jeden dieser Teile wieder in drei und alle diese Teile wieder in zwei gleiche Teile; dieses Verfahren ist leichter und

Digitized by Google

bequemer, als wenn man die Strecke mit einem Male in zwölf gleiche Teile teilen wollte, weil es schwer hält, den Zirkel gerade so weit zu öffnen, daß er dem zwölften Teile der Strecke gleich ist. Hierzu kommt noch, daß die wiederholten Versuche in der Regel viel Zeit erfordern und die Reinheit der Geraden durch die vielen Zirkelstiche leidet.

Ist die Anzahl der Teile nicht ein Vielfaches der Zahl 2, so wird man durch einiges Nachdenken bald die zweckmäßigste Einteilung derselben finden. Eine Strecke, welche in fünfzehn gleiche Teile geteilt werden soll, würde man zuerst in drei und jedes Drittel wieder in fünf gleiche Teile teilen. In neun gleiche Teile wird eine Strecke geteilt, wenn man sie zuerst in drei und jeden dieser Teile wieder in drei gleiche Teile teilt.

5. Aufgabe. Durch einen Punkt i zu einer Geraden a b (Fig. 87) die Parallele mittelst rechtwinkligen Dreiecks zu ziehen.

Man legt das Dreieck e f g mit der Seite e f gegen die Gerade a b. Legt man gegen die Seite e g das Lineal m und schiebt das Dreieck an diesem entlang bis zu dem Punkt i, so kann man an dieser Seite die Gerade c d ziehen, welche zu a b parallel sein wird.

6. Aufgabe. Einen Winkel (Fig. 88) in zwei gleiche Teile zu teilen.

Man beschreibt mit beliebiger Zirkelöffnung um den Scheitelpunkt a den Kreis d e. Hierauf beschreibt man mit beliebiger (am besten derselben) Öffnung des Zirkels um die Punkte d und e die sich in f schneidenden Bogen und zieht a f. Dadurch ist der Winkel c a b in zwei gleiche Teile geteilt.

Hat der Winkel b a c 90°, so wird jeder der Winkel c a f und f a b 45° halten.

7. Aufgabe. Einen Transporteur zu zeichnen.

Man zieht (Fig. 89) die beiden Parallelen a b und d c, dazu die Senkrechten a c und b d und beschreibt um die Mitte o der Strecke a b vier konzentrische Halbkreise, jedoch so, daß der Raum zwischen denselben immer kleiner wird, je größer die Halbmesser genommen werden, und der Halbmesser des äußersten Halbkreises kleiner ist als die Entfernung o a. Hierauf teilt man jeden der beiden äußersten Viertelkreise (Quadranten) in neun gleiche Teile. Durch die so erhaltenen siebzehn Teilpunkte zieht man Gerade, welche alle nach o gerichtet sind, und setzt an die Punkte, in welchen diese Geraden die beiden Halbkreise schneiden, die Zahlen von 180 bis 0, von 10 zu 10 oberhalb des innersten Halbkreises von der linken zur rechten Hand, und von 0 bis 180 unterhalb des darauf folgenden, wie die Figur zeigt. Hierauf halbiert man die Bogen von 10° des äußersten Halbkreises und zieht durch die Teilpunkte gleichfalls nach o gerichtete Gerade, die aber nur bis zum dritten Halbkreise gehen dürfen. Diese drei Halbkreise werden dadurch von fünf zu fünf Grad eingeteilt sein. Hierauf teilt man den äußersten Halbkreis von Grad zu Grad ein und zieht durch diese Teilpunkte zwischen den äußersten Halbkreisen wiederum nach o gerichtete Gerade. Der Mittelpunkt o ist durch einen kleinen Einschnitt zu bezeichnen.

Zu bemerken ist noch, daß man bei allen Kreisen, welche in mehrere gleiche Teile geteilt werden sollen, dieselben, wenn irgend angängig, erst in zwei, jeden dieser Teile wieder in zwei und so weiter einteilt, bis man die bestimmte Anzahl von Teilen erhält. Dieses Verfahren ist viel bequemer, als wenn man durch Versuche die ganze Kreislinie mit einem Male einteilen wollte.

8. Aufgabe. Vermittelst des Transporteurs den Winkel o f g (Fig. 89) zu messen.

Digitized by Google

Man macht die Schenkel des Winkels größer, als der Halbmesser des Transporteurs ist, legt denselben so an den Winkel, daß sein Mittelpunkt o genau auf den Scheitel des Winkels fällt und die Geraden o b und o g sich decken. Alsdann zeigt der Bogen b h die Anzahl der Grade oder die Größe des Winkels an.

9. Aufgabe. Den Winkel b a c an d f in d anzutragen (Fig. 90).

Man beschreibt mit beliebiger Zirkelöffnung um a den Bogen b c; denselben Bogen beschreibt man auch um d, trägt alsdann c b von f nach e ab und zieht die Gerade d e, so ist Winkel e d f gleich dem Winkel b a c.

10. Aufgabe. Ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

Man zieht die Strecke a b (Fig. 91) und schlägt mit a b als Radius um die Punkte a, b Bogen, welche sich im Punkte c schneiden. Hierauf zieht man die Strecken a c und b c.

11. Aufgabe. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, wenn die Grundlinie und die zur Grundlinie gehörige Höhe gegeben sind.

Man teilt die Grundlinie a b (Fig. 92) in zwei gleiche Teile, errichtet auf a b in dem hierdurch erhaltenen Punkte c die Senkrechte c d, auf welcher man die gegebene Höhe c d abträgt. Hierauf zieht man die Strecken a d und b d.

12. Aufgabe. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die Schenkel so wie die Grundlinie gegeben sind.

Man zieht die gegebene Grundlinie a b (Fig. 93) und schlägt mit der Schenkellänge d e um die Punkte a, b die sich in c schneidenden Kreisbogen; hierauf verbindet man c mit a und b.

13. Aufgabe. Ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, von welchem die zur Grundlinie gehörige Höhe sowie die Schenkel gegeben sind.

Man zieht die Gerade a b (Fig. 94), errichtet auf dieser die Senkrechte d c, trägt auf letzterer die gegebene Höhe von d = d c ab, beschreibt um den Punkt c mit der Zirkelöffnung gleich der gegebenen Schenkellänge e f den Bogen a b, welcher die Grundlinie in a und b schneidet. Hierauf zieht man die Strecken a c und c b.

14. Aufgabe. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, von dem die Kathete a b (Fig. 95) und die Hypotenuse a c gegeben sind.

Man schlägt um die Mitte d der Hypotenuse a c mit dem Radius $\frac{a\,c}{2}$ den Halbkreis a b c. Hierauf trägt man mit dem Zirkel die Kathete a b von a aus in den Halbkreis als Sehne ein und verbindet b mit c.

15. Aufgabe. Ein Dreieck zu zeichnen, von dem die Grundlinie a b (Fig. 96) sowie die beiden Winkel m und n gegeben sind.

Man zieht die Grundlinie a b, trägt die Winkel m, n in a bezw. b an a b an (Aufgabe 9). und zieht a d sowie b f, welche sich in g schneiden.

16. Aufgabe. Die Richtigkeit eines Winkelmaßes zu prüfen.

Man beschreibt über der Strecke a b (Fig. 98) einen Halbkreis. Legt man einen Schenkel des Winkelmaßes an das Ende des Durchmessers b und die Spitze des Winkels an die Peripherie bei c, so muß der andere Schenkel durch a gehen, wenn das Winkelmaß richtig sein soll.

17. Aufgabe. Ein Quadrat ohne Benutzung der Reißschiene oder des Winkelmaßes zu zeichnen.

Digitized by Google

Man zieht a b (Fig. 99), errichtet in a die Senkrechte (Aufgabe 1), macht a e = a b, schlägt mit a b um b und e die sich in d schneidenden Kreisbogen und verbindet d mit e, b durch die Geraden d e, d b.

18. Aufgabe. Einen Rhombus zu zeichnen.

Man zieht (Fig. 100) a b, schlägt um a und b mit derselben Zirkelöffnung die sich in c und d schneidenden Kreise und verbindet die Punkte a, d, b und c durch Gerade. Ein Quadrat entsteht, wenn a b = c d wird (§ 44).

19. Aufgabe. Ein Parallelogramm, von dem zwei anstoßende Seiten a b, a c (Fig. 101) und ein Winkel b a c gegeben sind, zu zeichnen.

Man trägt auf den Schenkeln des Winkels b a c die Strecken a b bezw. a c ab, schlägt um c mit a b, um b mit a c die Kreise, welche sich in d schneiden, verbindet d mit b und c, so ist a b c d das verlangte Parallelogramm.

20. Aufgabe. In einen Kreis ein gleichseitiges Dreieck einzuzeichnen.

Man zieht (Fig. 102) den Durchmesser c d, schlägt mit dem Halbmesser um d den Bogen a E b und verbindet die Punkte a, b und c durch Gerade.

21. Aufgabe. In einen Kreis ein Quadrat einzuzeichnen.

Man zieht (Fig. 103) zwei zu einander senkrechte Durchmesser und verbindet deren Endpunkte.

22. Aufgabe. In einen Kreis ein regelmäßiges Sechseck einzuzeichnen.

Da die Seite des regelmäßigen Sechsecks (Fig. 104) dem Halbmesser gleich ist (§ 61), so trägt man den Halbmesser des Kreises sechsmal auf dem Umkreise ab und verbindet die hierdurch erhaltenen Punkte a, b, d, f, e, c durch Gerade.

23. Aufgabe. In einen Kreis ein regelmäßiges Achteck einzuzeichnen.

Man zieht (Fig. 103) zwei zu einander senkrechte Durchmesser und halbiert die entstandenen rechten Winkel.

24. Aufgabe. In einen Kreis eine Rosette einzuzeichnen.

Man teilt den Kreis (Fig. 106) in so viel gleiche Teile, als man der Rosette geben will, hier in sechzehn; zieht um einen beliebigen Punkt c der in der Mitte von a b auf a b errichteten Senkrechten mit dem Radius a c den Bogen a b; beschreibt ferner um a mit a c den konzentrischen Kreis, auf welchem die Kreismittelpunkte der einzelnen Rosettenbogen wie für a b zu suchen sind.

25. Aufgabe. Eine gotische Rosette zu zeichnen, welche als Fenster benutzt werden kann.

Man teilt den Umfang eines Kreises (Fig. 107) in sechzehn gleiche Teile und verbindet alle Teilpunkte mit dem Kreismittelpunkt. Hierauf teilt man den Halbmesser in zwei gleiche Teile, zieht mit dem Radius o a den punktierten konzentrischen Kreis g a h b und beschreibt um a mit a c den Bogen c d, um h den Bogen g d, um b den Bogen e f u. s. w.

26. Aufgabe. Den Mittelpunkt eines Kreises zu finden.

Man zieht (Fig. 109) die beiden Sehnen a c und c b und errichtet auf den Sehnen in ihrer Mitte die Senkrechten d e und f g, welche sich in dem Mittelpunkte o des Kreises schneiden. Es ist jedoch nicht notwendig, die Sehnen a c und c b zu zeichnen, sondern es genügt, um die drei Punkte a, c und b die gleichen Kreisbogen bei d, e, f und g zu beschreiben und die Geraden d e und f g zu ziehen.

Digitized by Google

27. Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, dessen Peripherie durch drei gegebene Punkte a, b, c geht.

Das Verfahren ist hier dasselbe wie bei der vorigen Aufgabe. Man beschreibt (Fig. 110) um die Punkte a, b und c die gleichen Kreisbogen bei d, e, f und g und zieht die Geraden d f und e g, welche sich in dem Mittelpunkt o des Kreises schneiden.

28. Aufgabe. In ein Dreieck a b c einen Kreis zu zeichnen, der die Seiten des Dreiecks berührt.

Man teilt (Fig. 111) die Winkel bei a und c in zwei gleiche Teile, zieht vom Schnittpunkte o dieser Winkelhalbierenden die Senkrechte o d auf a b und beschreibt mit o d um o den Kreis, welcher die Seiten des Dreiecks berührt.

29. Aufgabe. Die Tangente zu zeichnen, welche den Kreis A in einem gegebenen Punkt a berührt.

Man verbindet den gegebenen Punkt a (Fig. 112) mit dem Mittelpunkte c und errichtet auf a c in a die Senkrechte b d, welche den Kreis in dem Punkte a berührt.

30. Aufgabe. Den Berührungspunkt einer Tangente zu finden.

Man verbindet einen beliebigen Punkt a (Fig. 113) der Tangente mit dem Mittelpunkt c und schlägt über a c als Durchmesser den Kreis, welcher die Tangente im Berührungspunkte d schneidet.

31. Aufgabe. Von dem Punkte a aus an den Kreis e die Tangenten zu ziehen.

Man beschreibt über a e (Fig. 114) als Durchmesser den Kreis, der den Kreis e in den Berührungspunkten g, d schneidet, und verbindet a mit d und g, so erhält man die Tangenten.

32. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Dreiecks zu bestimmen.

Man halbiere (Fig. 97) zwei Dreiecksseiten und verbinde die erhaltenen Punkte mit den gegenüber liegenden Ecken, so schneiden sich diese beiden Geraden im Schwerpunkt o des Dreiecks.

33. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Parallelogramms zu finden.

Zieht man (Fig. 115) die beiden Diagonalen a d und b c, so ist ihr Schnittpunkt o der Schwerpunkt des Parallelogramms.

34. Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Paralleltrapezes zu finden.

a) Durch Ziehen der Diagonalen c b und a d (Fig. 116) erhält man die Dreiecke a c d, c d b, a d b und a c b. Sucht man von jedem der Dreiecke den Schwerpunkt und verbindet die erhaltenen Punkte und zwar e mit g, f mit h, so giebt der Schnittpunkt dieser Schwerlinien den Schwerpunkt o des Paralleltrapezes a b c d.

b) Man verbindet die Mittelpunkte i, k der parallelen Seiten c d und a b mit einander, verlängert c d über d um a b sowie b a über a um c d und verbindet die erhaltenen Endpunkte, so schneidet letztere Gerade i k im Schwerpunkt o des Trapezes.

35. Aufgabe. Den Schwerpunkt einer unregelmäßig begrenzten Fläche zu finden.

Der Schwerpunkt einer ganz unregelmäßigen Fläche kann gefunden werden, wenn man die Fläche nach dem verjüngten Maßstabe auf ein kleines Brett aufzeichnet, dieselbe ausschneidet und abwechselnd in zwei verschiedenen Ecken aufhängt. Zieht man von den Ecken aus, an welchen das Brettchen hängt, die lotrechten Geraden, so schneiden sich diese im Schwerpunkte.

Digitized by Google

Die beiden letzten Aufgaben sind hauptsächlich anzuwenden, wenn bei einem zu überwölbenden Raum von unregelmäßiger Grundfläche der Schwerpunkt gesucht werden soll.

36. Aufgabe. In einen Kreis ein Rechteck einzuzeichnen, welches, als Querschnitt eines Balkens gedacht, die größte Tragfähigkeit besitzt.

Man teilt den Durchmesser a b (Fig. 118) in drei gleiche Teile, errichtet auf a b in den hierdurch erhaltenen Punkten c und d die Senkrechten c e, d f und verbindet die Punkte a, e, b, f durch Gerade.

37. Aufgabe. In ein Quadrat ein regelmäßiges Achteck zu zeichnen.

Man beschreibt um die Eckpunkte a, d des Quadrats a b d c (Fig. 119) Kreise, welche die Diagonale c b in e, um die Eckpunkte b, c Kreise, welche die Diagonale a d in e berühren. Die Schnittpunkte dieser Kreise mit den Quadratseiten sind die Eckpunkte der verlangten Figur.

38. Aufgabe. Ein regelmäßiges Drei- bis Zwölfeck zu zeichnen, von denen eine Seite a b gegeben ist.

Man legt die Strecke a b (Fig. 121) als die Seite eines Vielecks hin, zieht mit dem Radius a b um a einen Bogen von 5 bis 6, ebenso um b von a bis 6, die sich beide in dem Punkte 6 schneiden. Durch den Punkt 6 zieht man die Senkrechte zu a b. Den Bogen von a bis 6 teilt man in sechs gleiche Teile. Die Gerade f b schneidet die Senkrechte 6 c in dem Punkte 3. Macht man diesen Punkt 3 zum Mittelpunkte des Kreises, der durch die Punkte a und b geht, so kann man auf ihm die Strecke a b dreimal abtragen, d. h. in den Kreis 3 ein gleichseitiges Dreieck zeichnen. Zieht man durch den Punkt f f 4 parallel zu a b und schlägt um 4 den durch die Punkte a und b gehenden Kreis, so kann man die Strecke a b viermal auf demselben abtragen und demnach ein Quadrat zeichnen. Trägt man die Strecke 6 h auf 6 c gleich 6 5 ab, so giebt der Punkt 5 den Mittelpunkt eines durch die Punkte a und b gehenden Kreises, auf dessen Peripherie die Strecke a b fünfmal abgetragen werden kann. Beschreibt man um den Punkt 6 den Kreis, welcher durch Punkt a und b geht, so kann auf demselben die Strecke a b sechsmal abgetragen d. h. in den Kreis ein gleichseitiges Sechseck gezeichnet werden. Trägt man die Strecke 6 h auf 6 c gleich 6 7 ab, so giebt der Punkt 7 den Mittelpunkt eines durch die Punkte a und b gehenden Kreises, auf dem die Strecke a b siebenmal abgetragen werden kann. Setzt man den Zirkel in 6 und zieht die Bogen a 12, d 11, e 10, f 9, g 8, so giebt 12 den Mittelpunkt für ein Zwölfeck, 11 den Mittelpunkt für ein Elfeck, 10 den Mittelpunkt für ein Zehneck u. s. w.

Von der Konstruktion der Korbbogen, Ellipsen und Eilinien.

1. Aufgabe. Einen Korbbogen mit gegebener Längsachse zu zeichnen.

a) Man teilt die Strecke a b in drei gleiche Teile a c = c d = d b (Fig. 123), schlägt um die Punkte c, d mit dem Halbmesser a c zwei Kreise, welche sich in e und f schneiden, zieht die Durchmesser e c g und f d k und beschreibt um e mit dem Halbmesser e g, um f mit dem Halbmesser f k die Kreisbogen g l h bezw. i m k.

b) Man teilt die Strecke a b in vier gleiche Teile a c = c d = d e = e b (Fig. 124), schlägt um c und e mit dem Halbmesser a c zwei sich in d berührende Kreise, beschreibt ferner um c und e mit dem Halbmesser c e zwei

Digitized by Google

sich in f und g schneidende Kreise, verbindet g mit c, f mit e und schlägt um g mit g k, um f mit f i die Kreisbogen k l bezw. h i.

c) Man teilt die Strecke a b wie im Falle b in vier gleiche Teile (Fig. 125), schlägt um c, d, e mit a c Kreise und macht die Schnittpunkte g, f des Kreises um d mit der auf a b in d errichteten Senkrechten zu Mittelpunkten der Kreise h i und h i.

2. Aufgabe. Einen Korbbogen mit gegebener Querachse zu zeichnen.

Man macht die gegebene Querachse a b (Fig. 126) zur Diagonale des Quadrats a f b g, schlägt um a und b mit dem Halbmesser a b die Kreisbogen h i, k l, welche die Verlängerungen der Quadratseiten in h, i bezw. k, l schneiden, beschreibt ferner um g mit g i, um f mit f h die Kreisbogen i d l bezw. h c k.

3. Aufgabe. Um ein Rechteck, dessen Höhe gleich der halben Grundlinie ist, einen Korbbogen zu zeichnen.

Man zieht durch die Mitte b von a c (Fig. 127) die Senkrechte b e, zieht in den beiden Quadraten a b e d und b c f e die Diagonalen b d, b f, e a und e c. Der Punkt g ist der Mittelpunkt des kleineren von d bis a gehenden Kreises, der Punkt h ist der Mittelpunkt des Kreises, der von c bis f geht, und die Punkte e, b sind die Mittelpunkte der beiden größeren Kreise.

4. Aufgabe. Einen Korbbogen, dessen Längs- und Querachse gegeben sind, zu zeichnen.

Man zieht durch den Mittelpunkt e (Fig. 128) von a b die Senkrechte c d, trägt $\frac{1}{3}$ c d von a aus auf a b = a f ab, teilt e f in 3 gleiche Teile, trägt $\frac{1}{3}$ e f von f nach g und macht b h = a g, so sind h und g Kreismittelpunkte der kleinen Bogen o b m und n a x. Schlägt man um g mit g h den Bogen k h i, so sind die Schnittpunkte i und k mit der verlängerten Querachse Mittelpunkte der großen Bogen n d o bezw. m c x.

5. Aufgabe. Einen Korbbogen, dessen Längs- und Querachse gegeben sind, aus acht Bogen von drei verschiedenen Halbmessern zu zeichnen.

a b (Fig. 129) sei die Längs-, c d die Querachse, c ihr gemeinschaftlicher Mittelpunkt. Man trägt die halbe Breite c e auf a b von a nach f, teilt die Entfernung e f in drei gleiche Teile. Der zweite Teilpunkt von e heiße g, die Strecke e g trägt man diesseits von f nach h und jenseits von e nach i, die Strecke 2 e f aber auf e c von e nach k, daß also e k sechs, e h fünf und e g sowie e i zwei Dritteile der Strecke e f enthalten. Ferner macht man e l = e h und e m = e k und zieht von den Punkten k und m durch g und i die vier Verbindungsgeraden k g n, k i o, m g p und m i q. Die Strecke e g trägt man auf diesen Verbindungsgeraden von k bezw. m = k r = k s = m t = m u ab, zieht von den vier Punkten r, t, s und u durch h und l die vier anderen Verbindungsgeraden. Um die Punkte h und l zieht man die Bogen w a v und x b y, um die Punkte k und m die Bogen n d o und p c q und um die Punkte r, s, t und u die Bogen von v bis n, von o bis x, von w bis p und von q bis y. Bei diesem Korbbogen sind die Verbindungen der einzelnen Bogenstücke nicht so sichtbar wie bei einem solchen von vier Bogen und zwei verschiedenen Halbmessern.

6. Aufgabe. Eine Ellipse, deren Achsen gegeben sind, mittelst einer Schnur zu zeichnen.

Auf zwei zu einander senkrechten Geraden (Fig. 130) trägt man vom Schnittpunkte o aus die Halbachsen o a = o b und o c = o d ab, schlägt

Digitized by Google

mit o a um c den Kreis, welcher die große Achse in den Brennpunkten e, f schneidet. In e und f befestigt man mittelst zweier Nadeln eine Schnur von der Länge der großen Achse a b, hält dieselbe in der angedeuteten Weise mittelst eines Stiftes straff und zeichnet durch Herumführen desselben die Ellipse.

7. Aufgabe. Eine Ellipse mit gegebenen Achsen mittelst Lineal und Winkel zu zeichnen.

Man befestigt an dem Lineal a b (Fig. 131) bei o einen farbigen Stift, trägt die beiden halben Achsen c d und d e von o = o g und o f ab und befestigt dort zwei kleine eiserne Stifte. An die beiden Achsen c d und d k legt man einen Winkel und fährt mit den beiden eisernen Stiften an den inneren Seiten des Winkels herum, wobei der farbige Stift den Bogen c o e beschreibt. Dieser Bogen ist der vierte Teil der elliptischen Figur, es muß daher die Konstruktion dreimal wiederholt werden.

Sehr vorteilhaft und bequem ist auch das sogenannte Andreaskreuz (Fig. 132) zum Zeichnen einer Ellipse. Dasselbe ist ein aus Holz geformtes, durchgehends mit einer Nute versehenes Kreuz; in der Nute können die an einem Stabe befestigten Schraubenköpfe auf und nieder gleiten.

In Fig. 132 ist a b c d das Kreuz, B der Querschnitt desselben und D der Stab oder Stangenzirkel mit dem Stifte bei l, welcher zum Zeichnen der Ellipse dient; k und i sind die Schrauben, durch welche der Stift in der Nute festgehalten wird. Bei A ist eine solche Schraube in der Ansicht von vorn gezeichnet, unten befindet sich der Kopf und oben die Mutter. Durch die ganze Länge des Stabes sind nahe bei einander kleine Löcher gebohrt, durch welche die Schrauben k und i gesteckt werden können.

Will man die Ellipse zeichnen, so zieht man die zu einander senkrechten Achsen e g und f h, trägt die halbe große Achse von l nach i, die halbe kleine Achse von l nach k ab und befestigt in i und k die Schrauben. Hierauf legt man das Kreuz auf die Geraden e g und f h und schiebt die Schraubenköpfe so in die Nute des Kreuzes hinein, daß der Stift l auf e zeigt. Dreht man den Stab in der Richtung von e bis h und läßt hierbei die Schraubenköpfe in der Nute entlang gleiten, so wird der Stift l die verlangte Ellipse beschreiben.

In Fig. 133 ist ein Instrument dargestellt, mit welchem sich auf eine sehr leichte Art eine Ellipse zeichnen läßt. Die Einrichtung dieses Instruments bezieht sich auf die Anwendung des Satzes, daß von einer Geraden a c b ein jeder Punkt, z. B. c eine Ellipse beschreibt, wenn a in einem Kreise herumgeführt wird, während b auf einer Geraden fortgleitet, die durch den Mittelpunkt des von a beschriebenen Kreises geht. In der Abbildung (Fig. 133) ist a mit einem Kurbelarme a d verbunden; der Stift d ist verschiebbar, es kann daher a d gleich jedem beliebigen Halbmesser gemacht werden; der Stift c, welcher die Ellipse beschreibt, ist ebenfalls auf der Stange a b verschiebbar, und der Stift a verbindet den Kurbelarm d a mit der Stange a b. Setzt man den Stift d auf das Papier und dreht den Kurbelarm so herum, daß a einen Kreis beschreibt, dessen Mittelpunkt in d liegt, während der Stift b an einem Lineal hingeleitet, welches durch den Mittelpunkt des Kreises geht, so wird der Stift c die verlangte Ellipse beschreiben.

8. Aufgabe. Eine Eilinie zu zeichnen.

Man zieht in einem Kreise b e c d (Fig. 134) die zu einander senkrechten Durchmesser b c und d e, zieht durch e die Geraden c g und b h und schlägt mit b c um b den Bogen c h, um c den Bogen b g und mit e h um e den Bogen g f h.

Digitized by Google

9. Aufgabe. Eine Eilinie von gegebener Längsachse zu zeichnen.

Man teilt die gegebene Strecke c d (Fig. 135) in sechs gleiche Teile, zieht durch m die zu c d senkrechte Gerade a b und trägt auf dieser, von m nach n und o, fünf der gleichen Teile ab, wodurch man die Mittelpunkte für die beiden größten Bogen b i, a h erhält. Dann schlägt man mit m b um m den Kreis b c a e, zieht die Geraden n e i, o e h, welche den Kreis um m in f bezw. g, den Mittelpunkten für die Kreisbogen i l bezw. h k schneiden. Endlich beschreibt man um p mit dem Radius p k den kleinen Bogen k d l.

Von der Konstruktion der Gewölbebogen und anderer häufig angewandter Linien.

§ 93. Erklärung. Die Bogen erhalten hinsichtlich ihrer Form verschiedene Benennungen. Ein Bogen, welcher aus einem Halbkreise besteht, heißt ein voller Bogen; ein aus mehreren Kreisstücken gebildeter Bogen, dessen halbe Weite größer als die Höhe ist, heißt ein gedrückter Bogen; ist die Höhe größer als die halbe Weite, so heißt er ein erhabener Bogen. Ein steigender Bogen heißt derjenige, dessen eine Seite höher liegt, als die andere; und ein gotischer Bogen derjenige, welcher aus zwei sich schneidenden Kreisstücken besteht.

§ 94. Bei der Anfertigung eines Bogens kommt es hauptsächlich darauf an, daß die Widerlager gehörig geformt sind, d. h. es muß der Radius, mit welchem der Bogen konstruiert ist, genau in die Ebene fallen, in welcher Bogen und Widerlager liegen. Ferner müssen die Widerlager, damit die Last der Gewölbe möglichst senkrecht auf dieselben wirkt, Tangenten der Bogen bilden, wie a c b (Fig. 136) Tangente des Bogens c d. Auch müssen die einzelnen Kreisstücke gedrückter Bogen in ihren Schnittpunkten gemeinsame Tangenten besitzen, sich also berühren; so ist e f die gemeinschaftliche Tangente der beiden Bogen c d und d g, weil sich die Kreismittelpunkte h und m auf der zur Tangente e f senkrechten Geraden d m befinden. Hierdurch wird verhindert, daß die Bogen beim Zusammenstoßen sowohl unter sich wie auch mit den Widerlagern einen Bruch bilden, was bei Gewölben nicht vorkommen darf.

1. Aufgabe. Einen steigenden Bogen aus Kreisstücken so zu zeichnen, daß die Scheitellinie wagerecht auf den Widerlagern ruht.

Die Gerade a b (Fig. 137) wird die Steigungslinie und die Gerade h m die Scheitellinie genannt.

Man zieht die Wagerechte a c d, macht c d = b c, teilt die Strecke a d in zwei gleiche Teile, errichtet auf a d im Mittelpunkte g die Senkrechte f g und zieht durch b die Parallele b e zu c g, so ist e der Mittelpunkt für den kleineren und g der Mittelpunkt für den größeren Bogen und die Scheitellinie h m die gemeinschaftliche Tangente beider. Ebenso müssen die Widerlager bei a und b Tangenten ihrer beiderseitigen Bogen sein.

2. Aufgabe. Einen steigenden Bogen zu zeichnen, bei welchem die Scheitellinie parallel zur Steigungslinie läuft.

Man zieht die Wagerechte a c (Fig. 138) und die Steigungslinie a b, teilt a c in zwei gleiche Teile und errichtet auf a c im Mittelpunkte d die Senkrechte d e, welche a b in k schneidet; trägt man die Strecke a k von k aus auf d e = k e ab, so ist e der Scheitelpunkt, durch welchen die Scheitellinie f g parallel a b zu ziehen ist. Hierauf verbindet man a mit e, teilt a e in zwei gleiche Teile und zieht durch die Punkte h und k die Gerade h i, so ist i der Mittel-

Digitized by Google

punkt für den Bogen a e. Ferner zieht man i e und parallel c a die Gerade b l, wodurch man den Punkt l, den Mittelpunkt für den Bogen e b, erhält.

3. Aufgabe. Einen steigenden Bogen aus Kreisstücken so zu zeichnen, daß die Scheitellinie weder parallel der Steigungslinie ist noch wagerecht auf den Widerlagern ruht.

Man zieht die Steigungslinie a b (Fig. 139) und die Scheitellinie c d, trägt die Strecke c a von c nach e und b d von d nach f und zieht die Geraden a e und f b, welche sich in l, dem eigentlichen Scheitelpunkte, schneiden. Zieht man l k senkrecht c d und die Wagerechten b i, a m, so ist k der Mittelpunkt für den Bogen a l und i der Mittelpunkt für den Bogen l b.

4. Aufgabe. Einen steigenden Bogen zu zeichnen, wenn der Mittelpunkt, die Höhe und die Weite gegeben sind.

Man teilt die Steigungslinie a b (Fig. 140) bei f in zwei gleiche Teile, zieht die Gerade f c gleich der gegebenen Höhe des Bogens, beschreibt mit f c als Radius einen Quadranten a e d, teilt a e in vier gleiche Teile, die letzte Strecke e 3 in zwei gleiche Teile und errichtet in den erhaltenen Punkten Senkrechte zu a e. Ferner teilt man a f und f b in dieselbe Anzahl Teile wie a c und zieht durch die erhaltenen Punkte Parallele zu f c von derselben Länge wie die entsprechenden Senkrechten zu a e nach der Ordnung der Zahlen 1, 2, 3, 4, so bestimmen die erhaltenen Punkte den verlangten Bogen.

5. Aufgabe. Einen gotischen Gewölbebogen zu zeichnen.

Man beschreibt mit a b (Fig. 141) um a den Bogen b c, um b den Bogen a c, dann ist a c b der verlangte gotische Bogen. Ist, wie in Fig. 142, die Höhe d e des Bogens und die Grundlinie f g gegeben, so teilt man die Strecke d g bei h in zwei gleiche Teile und errichtet auf d g in h die Senkrechte h k, wodurch man den Mittelpunkt k für den Bogen d g erhält; trägt man k e von e nach l, so ist l Mittelpunkt für den Bogen f d.

6. Aufgabe. Die zu einem Kreuzgewölbe erforderlichen Diagonalbogen zu zeichnen, wenn der Hauptlehrbogen a e c ein halber Kreisbogen ist.

Man zieht in dem Quadrat a b d c (Fig. 143) die beiden Diagonalen a d und b c, macht m n gleich c f und n g = n h = a m, so sind g und h die beiden Brennpunkte; in diese muß man Stifte einschlagen und die halbe Ellipse a n d zeichnen.

7. Aufgabe. Den Diagonalbogen zu zeichnen, wenn die Lehrbogen gleiche Halbkreise sind.

Man teilt a b (Fig. 144) in mehrere gleiche Teile, hier in acht, die beiden letzten Teile bei a und b in noch zwei weitere, um die Biegung desto genauer zu erhalten, und zieht durch die Teilpunkte die zu a b Senkrechten e d, g f, i h u. s. w. bis zum Schnitt mit der Diagonale a c. Hierauf errichtet man in den Schnittpunkten auf der Diagonale die Senkrechten k l, m n, o p u. s. w., trägt die Strecken e d, g f, i h u. s. w. von k nach l, von m nach n, von o nach p u. s. w. ab, wodurch man die einzelnen Punkte des Grabbogens erhält, welche mit freier Hand oder vermittelst eines biegsamen Lineals verbunden werden. Desselben Verfahrens bedient man sich auch, wenn die Grundflächen aus Trapezen bestehen.

8. Aufgabe. Den Diagonalbogen zu zeichnen, wenn die Lehrbogen gotische sind.

Das Verfahren (Fig. 145) ist dasselbe wie bei Aufgabe 7.

Digitized by Google

9. Aufgabe. Die Lehrbogen eines Kreuzgewölbes über dem unregelmäßigen Viereck a b c d zu zeichnen.

Man halbiert die Seiten des Vierecks (Fig. 146) und zieht die Geraden i m und h k; der Schnittpunkt g ist der Mittelpunkt des Gewölbes. Hierauf beschreibt man um i den Halbkreis a e b und errichtet auf a b, b d, d c und c a die Senkrechten i e, k l, m n und h f. Durch die Höhe i e wird die Höhe der andern gedrückten Bogen über c a, c d und d b sowie die Höhe der Grabbogen über g c, g d, g b und g a bestimmt, welche vermittelst der Schnur gezogen oder durch Stichmaße abgetragen werden können.

Zeichnet man von den Figuren 123 bis 132 nur die obere Hälfte, welche sich über der Wagerechten befindet, so können dieselben als gedrückte Bogen betrachtet werden. Teilt man hingegen die Figuren durch eine Lotrechte in zwei gleiche Teile, so erhält man durch Drehen eines Teiles um 90° einen erhabenen Bogen.

10. Aufgabe. Eine Radlinie (Cykloide) zu zeichnen.

Wenn man sich bei einem Rade oder einer kreisförmigen Scheibe (Fig. 147) den Punkt, welcher die Grundlinie berührt, merkt, so beschreibt derselbe bei der Umdrehung des Rades bis zu der Stelle, bei welcher er wieder die Grundlinie berührt, einen Bogen, welcher Radlinie genannt wird.

A ist die Scheibe und D der Punkt, welcher die Radlinie beschreibt. Man teilt den Umkreis von A in 12 gleiche Teile und trägt diese Teile auf a b von D nach D" ab. Hierauf zieht man durch die Punkte c, d, e, f, g, h Wagerechte und errichtet auf DD" in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w. die Senkrechten, welche f y in den Punkten i, k, l, m, n, o schneiden. Alsdann beschreibt man um o und z die beiden Kreise, sowie um n den Bogen 5 l s, um m den Bogen 4 k r, um l den Bogen 3 i, um k den Bogen 2 q und um i den Bogen 1 p. Die Schnittpunkte p, q, i, r, s u. s. w. dieser Bogen mit den entsprechenden Wagerechten geben die verlangte Radlinie.

Die Radlinie wird als Gewölbbogen, sowie im Maschinenbau bei der Konstruktion der Zahnkurven benutzt.

11. Aufgabe. Eine Kettenlinie zu zeichnen.

Man hängt eine Kette oder ein Seil (Fig. 148) in der Richtung der Steigungslinie a b an einer Wand auf und läßt das Seil so weit herunter, bis es die gegebene Höhe c des steigenden Bogens erreicht; zeichnet man die hierdurch erhaltene krumme Linie ab, so kann man nach derselben die Lehrbogen bestimmen.

12. Aufgabe. Eine Spirallinie so zu zeichnen, daß ihre Windungen in gleicher Entfernung von einander bleiben.

Man zieht a b (Fig. 149), beschreibt um c mit c f den Halbkreis d e f, alsdann um d mit d f den Halbkreis f g, hierauf um c mit c g den Halbkreis g h, um d mit d h den Halbkreis h k u. s. w.

13. Aufgabe. Eine Spirallinie mit Benutzung eines gleichseitigen Dreiecks zu zeichnen.

Man verlängert die Seiten des gleichseitigen Dreiecks a b c (Fig. 150), schlägt um c den Bogen a b d, um a den Bogen d e, um b den Bogen e f, um c den Bogen f g u. s. w.

14. Aufgabe. Eine Schneckenlinie zu zeichnen.

Man zieht eine Lotrechte a b als Durchmesser der Schnecke (Fig. 168), teilt diese in sechzehn gleiche Teile und trägt neun solcher Teile von a nach o. Einen solchen Teil trägt man von a nach p; um o beschreibt man einen Kreis,

Digitized by Google

dessen Halbmesser gleich der Entfernung zweier Teilpunkte sein muß; dieser Kreis wird das Auge der Schnecke genannt. Alsdann zeichnet man ein Quadrat in den Kreis und in dieses wieder vier kleinere Quadrate (Fig. 169), teilt o 1 in drei gleiche Teile, ebenso o 2, o 3 und o 4 und zieht durch die entstandenen Teilpunkte wage- und lotrechte Gerade. Dann beschreibt man um 1 mit a 1 als Radius den Bogen a c, um 2 mit c 2 als Radius den Bogen c b und so weiter nach der Reihe der Zahlen, bis man den letzten Bogen um 12 von m nach n gezogen hat. Um die Mittelpunkte und die Verbindungslinien für die innere Schnecke zu erhalten, teilt man die Entfernung 1—5, 2–6, 3—7 u. s. w. (Fig. 169) ebenfalls wieder in drei gleiche Teile; dann setzt man den Zirkel in den Teilpunkt, welcher zunächst der 1 steht, öffnet ihn bis p und schlägt den Bogen p q, darauf setzt man ihn in den Teilpunkt, welcher nahe der 2 steht, öffnet ihn bis q und zieht den Bogen q r und so weiter nach der Reihenfolge der Zahlen, bis die Figur vollendet ist.

Von den architektonischen Gliedern.

§ 95. Die architektonischen Glieder sind Verzierungen, welche der Baukunst angehören; man teilt sie in gerad- und krummlinige, in deckende und liegende Glieder ein. Geradlinig sind sie, wenn sie von ebenen Flächen begrenzt werden und folglich ihr Profil aus Geraden besteht; krummlinig, wenn sie von krummen Flächen eingeschlossen werden, ihr Profil also eine krumme Linie bildet. Deckende Glieder werden sie genannt, wenn sie als Gesimse oben an einem durch sie zu verzierenden Gegenstande angebracht werden; liegende, wenn sie sich besser zur Verzierung des unteren Teiles eines Gegenstandes eignen.

§ 96. Die wesentlichsten Regeln, welche für das Zusammensetzen der Glieder zu Gesimsen gegeben werden, bestehen darin, daß man gerad- und krummlinige mit einander wechseln läßt. Ohne Befolgung dieser Vorschrift würden die krummlinigen in einander übergehen und dadurch Verwirrung erzeugen, während den geradlinigen Gliedern beim Zusammentreffen die gehörige Verbindung fehlt. Diese Verbindung erfordert es auch, daß große und kleine Glieder wechseln und so die Übergänge von dem einen zu dem anderen gegeben werden. Ferner muß man bei der Zusammensetzung noch darauf achten, daß ein Glied mehr oder weniger vor dem anderen hervortritt, damit sich Vertiefungen und starke Schatten bilden. Richtet man sich bei der Zusammensetzung der einzelnen Glieder nach den obigen Regeln und nach guten Vorbildern, so wird man es durch einige Übung bald dahin bringen, geschmackvolle Gesimse zusammenzustellen.

Die Konstruktion der architektonischen Glieder ist höchst einfach und leicht aus den Figuren zu ersehen. Die Kreismittelpunkte sind, um die Übersicht zu erleichtern, mit Buchstaben bezeichnet.

§ 97. Namen der architektonischen Glieder.

Fig. 151. Das Riemchen od. Plättchen.
Fig. 152. Das Stäbchen.
Fig. 153. Das Band oder die Platte.
Fig. 154. Der Viertelstab.
Fig. 155. } Der Pfühl oder Rundstab.
Fig. 156. }
Fig. 157. }
Fig. 158. } Die Hohlkehle oder die Hohlleiste.
Fig. 159. }
Fig. 160. }
Fig. 161. }
Fig. 162. } Der Karnies oder die Welle.
Fig. 163. }
Fig. 164. }
Fig. 165. Der gedrückte Pfühl.
Fig. 166. } Die Einziehung.
Fig. 167. }

Digitized by Google

Von der Verwandlung der Figuren.

§ 98. Erklärung. Eine Figur in eine andere verwandeln heißt eine Figur zeichnen, die bei verschiedener Gestalt der gegebenen an Flächeninhalt gleich ist.

1. Aufgabe. Ein ungleichseitiges Dreieck a b c in ein gleichschenkliges zu verwandeln.

Man zieht durch die Spitze c (Fig. 170) zu der Grundlinie a b die Parallele d e, errichtet in der Mitte f der Seite a b zu a b die Senkrechte, welche d e in g schneidet, verbindet g mit a und b, so ist a b g das verlangte gleichschenklige Dreieck.

2. Aufgabe. Ein Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

Man verbindet die Spitze c mit der Mitte d der Grundlinie a b (Fig. 171), zieht b e ∥ d c und c e ∥ d b, so ist Parallelogramm c d b e = Dreieck a c b.

3. Aufgabe. Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

Man zieht durch die Spitze c (Fig. 170) die Parallele c e zu a b, errichtet in der Mitte d (Fig. 171) von a b die Senkrechte, welche c e in c schneidet, zieht b e ∥ d c und c e ∥ d b, so ist Rechteck c d b e = Dreieck a b c.

4. Aufgabe. Ein Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Man errichtet in a und b die Senkrechten auf a b (Fig. 67), welche die Seite d e in f und c schneiden, so ist Parallelogramm a b e d = Rechteck f a b c.

5. Aufgabe. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Man verlängert c d um d e = b d (Fig. 172), beschreibt über c e als Durchmesser den Halbkreis, verlängert b d bis zur Peripherie in g, so ist d g die Seite des Quadrates, welches gleichen Inhalt mit dem Rechteck a b c d hat.

6. Aufgabe. Ein Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln.

Man verwandelt nach 3 das Dreieck in ein Rechteck und dieses nach 5 in ein Quadrat.

7. Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, das doppelt so groß ist als ein gegebenes.

Man verlängert g d (Fig. 176) um d a = d b, verbindet a mit b, so ist das Quadrat a e f b = 2 Quadraten d b h g.

8. Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, das halb so groß ist als ein gegebenes.

Man schlägt um a b (Fig. 176) als Durchmesser den Halbkreis a d b, errichtet auf a b in dem Mittelpunkt c die Senkrechte c d und zieht d b. Diese Strecke ist die Seite des Quadrates, welches halb so groß ist als das gegebene a e f b.

9. Aufgabe. Die Quadrate A, B, C in ein Quadrat zu verwandeln.

Setzt man die Seiten der Quadrate A und B (Fig. 177) rechtwinklig bei g zusammen und zieht die Hypotenuse d e, so giebt diese die Seite eines Quadrates, welches ebenso groß ist als die beiden Quadrate A und B zusammen genommen. Setzt man die Seite d f des Quadrates C rechtwinklig auf d e und zieht die Hypotenuse f e, so ist diese die Seite des Quadrates, welches gleichen Inhalt mit den Quadraten A, B, C hat.

10. Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, der halb so groß ist als ein gegebener.

Digitized by Google

Man zieht (Fig. 178) den Durchmesser a b des Kreises, errichtet auf a b im Mittelpunkt c die Senkrechte c d und zieht die Strecke d b, welche der Durchmesser des gesuchten Kreises ist.

11. Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, der doppelt so groß ist als ein gegebener.

Man zieht (Fig. 179) senkrecht zum Durchmesser a b die Strecke b c = a b und verbindet a mit c, so ist a c der Durchmesser des verlangten Kreises.

12. Aufgabe. Einen Kreis zu zeichnen, welcher viermal so groß ist als ein gegebener.

Nimmt man den Durchmesser a b (Fig. 180) des kleinen Kreises zum Halbmesser c d des größeren, so wird dessen Flächeninhalt viermal so groß sein als der des gegebenen Kreises.

Von der Flächeneinteilung.

§ 99. Da es bei verschiedenen Gewerben vorkommt, daß auf gegebenen Flächen eine bestimmte Anzahl von Kreisen oder Halbkreisen gezeichnet werden muß, und dies öfter Schwierigkeiten verursacht, so erscheint es nicht überflüssig, wenn der Einteilung der Flächen hier in Kürze gedacht wird.

Wir wollen eine Fläche wählen, welche 35 cm lang und 25 cm breit ist; sollte bei den einzuteilenden Flächen aber ein anderes Maß vorgeschrieben sein, so wird die Lösung keine Schwierigkeit bieten, wenn man sich mit den folgenden Aufgaben bekannt gemacht hat. In Fig. 193 ist der verjüngte Maßstab angegeben, nach welchen die Flächen gezeichnet sind.

1. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite einen Kreis zu zeichnen, der einen möglichst großen Teil der Fläche einnimmt.

Da die gegebene Fläche (Fig. 181) ein Rechteck ist, so besteht der Kreis aus zwei verschiedenen, nachher zusammen zu setzenden Stücken. Teilt man die Länge der Fläche in sieben gleiche Teile, so ist die Größe von drei solchen Teilen der Halbmesser des Kreises, welcher auf der Fläche gezeichnet werden muß; mit demselben Halbmesser zeichnet man auch den Kreisabschnitt, welcher das fehlende Kreisstück gerade ersetzt.

2. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite zwei möglichst große Halbkreise zu zeichnen.

Man teilt die Länge der Fläche in sieben gleiche Teile (Fig. 182), trägt einen dieser Teile auf a b = a e sowie auf c d = d f ab und zieht e f, welche Gerade die Fläche in zwei gleiche Teile teilt. Halbiert man die rechten Winkel bei b und c, so treffen die Halbierungslinien c f in den Mittelpunkten g, h der verlangten Kreise.

3. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite drei gleiche Halbkreise zu zeichnen.

Man teilt die Breite der Fläche (Fig. 183) in zwei gleiche Teile und beschreibt mit der halben Breite als Radius die drei verlangten Halbkreise.

4. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite vier gleiche Halbkreise zu zeichnen.

Man teilt die Diagonale a b der Fläche (Fig. 185) in vier gleiche Teile und beschreibt mit einem solchen Teil als Radius die vier verlangten Halbkreise.

Digitized by Google

5. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite fünf gleiche Halbkreise zu zeichnen.

Man teilt die Breite der Fläche (Fig. 185) in acht gleiche Teile und beschreibt mit drei von diesen Teilen als Radius die vier Halbkreise, welche sich an den Seiten der Fläche befinden, und nach diesen den fünften Halbkreis, welcher zwischen den vier ersteren liegt.

6. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite sechs Halbkreise zu zeichnen.

Teilt man die Länge der Fläche (Fig. 186) in vier gleiche Teile, so giebt die Größe eines solchen Teiles den Halbmesser, vermittelst dessen die sechs verlangten Halbkreise beschrieben werden können.

7. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite acht Halbkreise zu zeichnen.

Teilt man die Breite der Fläche (Fig. 187) in fünf gleiche Teile, so giebt die Größe von drei solchen Teilen den Durchmesser der verlangten Halbkreise. Teilt man hierauf die Breite der Fläche wieder in zwei gleiche Teile, so erhält man den Mittelpunkt zu den beiden Halbkreisen a und b; dann zeichnet man die vier Halbkreise c, d, e, f und nach diesen die Halbkreise g, h.

8. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite zehn Halbkreise zu zeichnen.

Man teilt die Länge der Fläche (Fig. 188) in acht gleiche Teile, teilt drei von diesen Teilen wieder in zwei gleiche Teile und erhält so den Halbmesser zu den verlangten Halbkreisen. Nachdem man den Halbmesser gefunden, zeichnet man zuerst die beiden Halbkreise a und b, dann die Halbkreise c, d, e und f und nach diesen die Halbkreise g, h, i, k.

9. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite zwölf Halbkreise zu zeichnen.

Man teilt die Breite der Fläche (Fig. 189) in vier gleiche Teile und beschreibt mit der Größe eines solchen Teiles die Halbkreise a, b, c, d und nach diesen die Halbkreise e, f, g, h, i, k, l und m.

10. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite die Netze zu zwei eingesetzten Trichtern von der Form eines Kegelstumpfes zu zeichnen.

Man teilt die Breite der Fläche (Fig. 190) in neunzehn gleiche Teile, so giebt die Größe von zehn solchen Teilen den Halbmesser zu dem äußern Kreise; der Halbmesser des innern Kreises ist gleich der Hälfte des Halbmessers des äußeren. Schlägt man um a und b Kreise, so ist deren Schnittpunkt Mittelpunkt der gesuchten Kreise. Zieht man c a und c d, so erhält man den Ausschnitt des Kreises.

11. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite die Netze zu drei gleich großen eingesetzten Trichtern zu zeichnen.

Man teilt die Länge der Fläche (Fig. 191) in sieben gleiche Teile, so giebt die Größe von zwei solchen Teilen den Halbmesser des äußeren Kreises; den Halbmesser des innern Kreises erhält man, wenn der des äußern in fünf gleiche Teile geteilt und die Größe von zwei solchen Teilen in den Zirkel genommen wird. Nachdem man die Kreise gezeichnet, zieht man von den Schnitt- und Berührungspunkten nach den Mittelpunkten die Geraden d a, e a, f b, g b, i c und h c, welche die Ausschnitte der Kreise bestimmen.

Digitized by Google

12. Aufgabe. Auf einer Fläche von 35 cm Länge und 25 cm Breite die Netze zu vier gleich großen eingesetzten Trichtern zu zeichnen.

Man teilt die Länge der Fläche (Fig. 192) in vier gleiche Teile und beschreibt mit der Größe eines solchen Teiles die beiden Kreise um a und b, hierauf an der gegenüberliegenden Seite der Fläche die Kreise um c und d. Der Halbmesser des inneren Kreises ist gleich der Hälfte des Halbmessers des äußeren Kreises. Von den Schnittpunkten der Kreise zieht man nach den Mittelpunkten die Geraden e a, f a, g b, h b, i d, k d, m c und l c, durch welche man die Ausschnitte der Kreise erhält.

Von der praktischen Geometrie.

§ 100. Zur Bezeichnung eines Punktes im Freien dienen Absteck- (Visier-) stäbe. Dieselben sind unten mit einer eisernen Spitze versehen, 2—3 m lang und besitzen einen kreisförmigen Querschnitt von 4—6 cm. Um ein Verziehen zu verhüten, werden die Stäbe aus zwei Teilen der Länge nach zusammengeleimt und, damit sie auf größere Entfernungen gut sichtbar sind, mit Ölfarbe in Abständen von 20—30 cm abwechselnd weiß-roth oder weiß-schwarz gestrichen.

§ 101. Zum Ausmessen der Linien benutzt man Meßstäbe von 2—5 m, bei ebenen Flächen bedient man sich auch mit Vorteil des Meßbandes (Stahlbandes), das gewöhnlich eine Länge von 10 oder 20 m hat.

An jedem Ende des Meßbandes wird ein großer Ring von ungefähr 4 cm im Durchmesser angebracht, damit man durch dieselben die sogenannten Meßbandstäbe stecken kann.

Diese Stäbe sind etwa 1,5 m lang, rund und so stark, daß man die Ringe an denselben herunterlassen kann. Das untere Ende ist ungefähr 5 cm hoch mit Eisen beschlagen und mit einem Stift versehen, auf welchem der Ring des Meßbandes ruhen kann.

§ 102. Zum Errichten oder Fällen von Senkrechten bedient man sich der sogenannten Winkelscheibe (Fig. 204, 205). Dieselbe trägt auf einem mit einer Spitze versehenen Fuße ein Brett, in das mit einer Säge ein Kreuz rechtwinklig eingeschnitten ist. Bei Fig. 205 sind an den Endpunkten noch senkrechte Stifte angebracht. Mit diesem Instrumente geht man auf einer Geraden a b (Fig. 203) so lange auf und ab, bis man dasselbe senkrecht so einstecken kann, daß man durch den einen Schnitt die Punkte a und b und durch den anderen den Punkt c sehen kann; alsdann ist c d senkrecht a b.

1. Aufgabe. Eine Strecke mittelst Visierstäben abzustecken.

Man steckt in jeden Endpunkt der Strecke einen Stab, tritt dann einige Schritte hinter einen derselben und läßt die übrigen so stellen, daß sich alle einander decken.

2. Aufgabe. Einen rechten Winkel auf dem Bauplatze auszustecken.

Man trägt eine beliebige Länge auf einer Latte (Fig. 194) dreimal, auf einer anderen viermal und auf einer dritten fünfmal ab, legt die Endpunkte dieser Latten zusammen und zieht die kürzeren mit zwei Schnüren an, wodurch ein pythagoräisches Dreieck, also ein rechter Winkel gebildet wird. Beim Zusammenlegen großer Balken bedient man sich gewöhnlich dieses Verfahrens, indem man auf einem derselben 3, auf dem anderen 4 und auf einem Stab 5 m abträgt und die Balken so lange hin und her reibt, bis die bezeichneten

Digitized by Google

Punkte mit dem Stabe genau zusammentreffen; dieses Verfahren wird daher das Reibmaß genannt.

3. Aufgabe. Den Lauf eines Flusses zu messen und aufzuzeichnen.

Wenn man den Lauf eines Flusses M N (Fig. 195) bestimmen will, so zieht man längs desselben eine oder mehrere Gerade A B, B C u. s. w. und fällt von den Hauptbiegungen des Flusses auf dieselben die Senkrechten a A, d d, e e u. s. w., mißt sowohl die Länge derselben als auch die Entfernung der Punkte d, e u. s. w. von A und trägt sie nach dem verjüngten Maßstabe auf. Ist man bis B gekommen, so mißt man den Winkel A B C, geht in gleicher Weise bis C fort und weiter, wenn es erforderlich ist. Durch die gefundenen Punkte a, d, e u. s. w., h, i, k u. s. w. zieht man alsdann eine krumme Linie, welche den Lauf des Flusses gewöhnlich so genau als nötig bestimmt. Desselben Verfahrens bedient man sich auch, wenn eine krumme Linie gemessen und aufgezeichnet werden soll.

4. Aufgabe. Auf dem Felde zu einer unzugänglichen Geraden M N eine Parallele zu ziehen.

Man steckt in einen beliebigen Punkt a (Fig. 196) einen Visierstab, ebenso in zwei andere Punkte b und c, welche in den Geraden a N, a M liegen. Alsdann macht man b e = a b, c g = a c und auf der Geraden b c b d = b c = c f und setzt in e, d, f und g Visierstäbe. Hierauf bestimmt man in der Verlängerung von e d den Punkt h so, daß M, b, h in einer Geraden liegen, ebenso in der Verlängerung von g f den Punkt k so, daß N, c, k eine Gerade bilden. Nachdem die Länge der Strecken e h, g k gemessen ist, verlängert man a M und a N und macht a i = e h, a l = g k, so ist i l parallel M N.

5. Aufgabe. Eine Strecke über eine Grube zu messen.

Man steckt die Geraden c a, b a (Fig. 197) ab und mißt den Winkel a sowie die Strecken c a und a b, so wird sich beim Auftragen nach dem verjüngten Maßstabe die Länge der Strecke c b bestimmen lassen; oder man errichtet auf c b in c und b die Senkrechten c d, b e von gleicher Länge und mißt d e.

6. Aufgabe. Einen dreieckigen Platz auszumessen und aufzuzeichnen.

Die drei Strecken a b, b c und c a (Fig. 198) werden mit der Meßlatte gemessen und die Maße in einen Handriß eingetragen.

7. Aufgabe. Eine Strecke mit dem Meßbande auszumessen.

Man steckt durch die Ringe des Meßbandes die beiden Stäbe, und der Vorangehende versieht sich mit 5 oder 10 kleinen, 30 cm langen Stäbchen. Der Erste setzt den Stab in den Ausgangspunkt der zu messenden Geraden, der Zweite geht mit dem Meßbande in der Richtung des Gegenstandes, bis zu welchem man mißt, so weit als möglich vor und richtet sich durch Hülfe der ausgesteckten Zeichen in die Gerade ein; hierauf stellt er den Stab senkrecht, tritt etwas seitwärts und hält ihn frei in der Hand, damit der Hintere sehen kann, ob der Stab und folglich das ganze Band die Richtung der ausgesteckten Stäbe hat. Trifft dies nicht genau ein, so ruft der Hintere dem Vorderen zu, den Stab mehr links oder rechts zu stecken.

Alsdann steckt der Vordere in das Loch, welches die Spitze des Stabes gemacht hat, eines der kleinen Stäbchen. Beide heben das Meßband etwas in die Höhe und gehen weiter, bis der Hintere an die Stelle des eingesteckten

Digitized by Google

Stäbchens gelangt. Dann ruft er dem Vorderen halt! zu, zieht das kleine Stäbchen heraus, setzt den Stab in das Loch, und beide richten sich in der Geraden ein. Wenn dies geschehen, so hebt der Vordere den Stab in die Höhe, steckt in das entstandene Loch wieder eines der kleinen Stäbchen, der Hintere zieht den Stab aus, u. s. w. bis zum Endpunkt der Strecke.

8. Aufgabe. Eine Strecke über einen Berg zu messen.

Man befestigt vorn an einer Meßlatte von 5 Meter Länge (Fig. 199) eine Bleiwage (gleichschenkliges Dreieck mit Senkblei). Beim Messen legt man die Latte so an, daß die Bleiwage einspielt, d. h. daß die Latte wagerecht liegt, und steckt dort, wo die Verlängerung des Senkbleis den Boden trifft, einen Stab ein; an diesen legt man die Latte wieder an und fährt so fort, bis die Strecke gemessen ist.

9. Aufgabe. Die Höhe einer Mauer oder eines Turmes zu bestimmen.

Man stellt in einiger Entfernung von dem Gegenstande, welcher gemessen werden soll, eine Stange a b (Fig. 200) senkrecht auf, läßt hierauf eine andere Stange c d in gerader Richtung mit der Mauer so stecken, daß die drei Punkte a, c, f, wenn man über a hinsieht, sich decken; mißt man alsdann die Entfernung der beiden Stangen b d, ihre Höhen a b und c d und die Strecke b e, so wird sich, wenn die Figur aufgezeichnet ist, die durch a c f begrenzte Höhe e f mittelst des verjüngten Maßstabes finden lassen. Zu bemerken ist noch, daß bei diesem Verfahren die Visierlinie sehr genau aufgenommen werden muß.

10. Aufgabe. Die Höhe eines Baumes mittelst seines Schattens zu bestimmen.

Man mißt (Fig. 201) die Höhe und den Schatten eines senkrecht stehenden Stabes sowie den Schatten des Baumes. Hierauf macht man mittelst des verjüngten Maßstabes a c = der Schattenlänge des Stabes, c d, senkrecht a c, = der Höhe des Stabes, a b = der Schattenlänge des Baumes und zieht b e senkrecht b a, so ist b e die Baumhöhe.

11. Aufgabe. Ein unregelmäßiges Vieleck auszumessen und aufzuzeichnen.

Man zerlegt das Vieleck in lauter Dreiecke (Fig. 202), mißt alle Seiten und trägt die Dreiecke auf; oder man zieht durch das Vieleck (Fig. 203, 71) die Gerade a b, fällt von allen Eckpunkten auf a b die Senkrechten, mißt die Grundlinien und Höhen der entstandenen Trapeze und trägt dieselben auf.

12. Aufgabe. Die Breite eines Flusses zu bestimmen.

Man merkt sich jenseits des Flusses (Fig. 206) einen bestimmten Punkt c (Pfahl, Baum), steckt sich mittelst der Winkelscheibe einen rechten Winkel c a b ab, zieht b g senkrecht b a und verbindet c mit der Mitte h von b a, verlängert c h bis zum Schnitte mit b g in g, so ist b g = c a = der Flußbreite.

13. Aufgabe. Einen Platz wagerecht abzuebnen (planieren).

Man läßt auf dem Platze nach verschiedenen Richtungen kleine Stäbchen einschlagen, legt an dieselben eine gerade Latte, auf welche man eine Setzwage stellt, und schlägt die Stäbchen sämtlich auf gleiche Höhe, d. h. auf die Höhe der Latte, welche in wagerechter Richtung gehalten wird, ein, setzt jedoch die Latte jedesmal um, damit ein etwaiger Fehler sich aufhebt. Ist die Höhe überall richtig eingestellt, so weiß man, wie viel Erde an einem Orte angeschüttet und an einem anderen hinweggenommen werden muß.

Auf diese Weise, durch Nivellieren, kann man auch das Gefälle eines fließenden Wassers für kürzere Strecken finden. Denn schlägt man nach dem

Digitized by Google

angedeuteten Verfahren Pfähle am Ufer ein, so ist aus der Entfernung und dem Höhenunterschied der ersten und letzten Latte das Gefälle zu ermitteln.

14. Aufgabe. Die Schmiege zu einem Dachfenster abzunehmen.

Man hält ein Winkelmaß gegen den Sparren c b (Fig. 208) und sieht darauf, daß die Gerade e f lotrecht steht; hierauf mißt man die Strecken d f und f e, zeichnet die Maße in einen Handriß ein und zieht d e, wodurch man die Schmiege erhält.

Nach dieser Zeichnung kann das Dachfenster in jeder beliebigen Größe angefertigt werden.

Von den geometrischen Körpern.

§ 103. Ein allseitig begrenzter Teil des Raumes heißt Körper. Ein nur von Ebenen eingeschlossener Körper heißt Vielflächner (Polyeder); die begrenzenden Ebenen heißen Seitenflächen, die Schnittgeraden anstoßender Seitenflächen Kanten, die Schnittpunkte anstoßender Kanten Ecken (Fig. 209—218).

§ 104. Schneiden sich drei (oder mehr) Ebenen der Reihe nach in ebenso vielen parallelen Kanten, so entsteht ein drei- (oder mehr-) seitiger Prismenzug (z. B. ein vierseitiges oben und unten offenes Abfallrohr). Wird ein Prismenzug von zwei parallelen Ebenen begrenzt, so entsteht ein Prisma (Fig. 209). Die beiden begrenzenden parallelen und kongruenten Flächen heißen Grundflächen, die übrigen Seitenflächen des Prismas, der (senkrechte) Abstand der Grundflächen Höhe. Alle Seitenflächen zusammengenommen bilden den Mantel, Mantel und beide Grundflächen zusammen die Oberfläche des Prismas. Ein zu allen Seitenflächen senkrechter Schnitt heißt Normalschnitt des Prismas.

Die Seitenflächen eines Prismas sind stets Parallelogramme, die Grundflächen Dreiecke, Vierecke, Vielecke, und dementsprechend heißt das Prisma drei- (Fig. 209), vier- (Fig. 222), vielseitig. Sind sämtliche Grenzflächen eines Prismas Parallelogramme (Fig. 221), so heißt dasselbe Parallelepipedon. Im Parallelepipedon kann jede Fläche als Grundfläche aufgefaßt werden. Sind sämtliche Grenzflächen eines Prismas Rechtecke (ein Zimmer), so heißt es rechtwinkliges Parallelepipedon (Fig. 222); sind sämtliche Flächen Quadrate, Würfel (Fig. 216).

§ 105. Wird ein Prismenzug von zwei nicht parallelen, also im allgemeinen auch nicht kongruenten Ebenen begrenzt, so entsteht ein schief abgeschnittenes Prisma (Fig. 230). Die Seitenflächen sind im allgemeinen Paralleltrapeze, die Grundflächen Dreiecke, Vierecke, Vielecke, und demnach heißt der Körper ein drei-, vier-, vielseitiges schief abgeschnittenes Prisma. Alle Seitenflächen zusammengenommen bilden den Mantel, Mantel und beide Grundflächen zusammen die Oberfläche des schief abgeschnittenen Prismas. Ein zu allen Seitenflächen senkrechter Schnitt heißt Normalschnitt.

§ 106. Gleitet eine Gerade (Erzeugende) parallel zu sich selbst an einem Kreise (Leitlinie) hin, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt, so entsteht eine Cylinderfläche (z. B. ein kreisrundes, oben und unten offenes Abfallrohr). Eine zur Erzeugenden parallele Gerade durch den Mittelpunkt des Leitkreises heißt Achse der Cylinderfläche. Eine zur Cylinderachse parallele Ebene schneidet die Cylinderfläche in keiner, einer oder zwei Geraden, je nachdem sie den Leitkreis in keinem, einem oder zwei Punkten trifft. Eine Ebene, welche mit einer Cylinderfläche eine Gerade gemeinsam hat, heißt Berührungs- oder Tangential-

Digitized by Google

ebene der Cylinderfläche. Eine zur Cylinderachse schiefe Ebene schneidet die Cylinderfläche in einem Kreise oder einer Ellipse.

§ 107. Wird eine Cylinderfläche von zwei parallelen Ebenen begrenzt, so entsteht ein Cylinder (Fig. 210). Die zwei begrenzenden parallelen und kongruenten Flächen (Kreise oder Ellipsen) heißen Grundflächen. Der (senkrechte) Abstand der Grundflächen heißt Höhe, die Verbindungsgerade ihrer Mittelpunkte Achse, der durch die Grundflächen begrenzte Teil der Cylinderfläche Mantel, Mantel und beide Grundflächen zusammen Oberfläche, ein zum Mantel senkrechter Schnitt (Kreis oder Ellipse) Normalschnitt.

§ 108. Wird eine Cylinderfläche von zwei nicht parallelen, also im allgemeinen auch nicht kongruenten Ebenen begrenzt, so entsteht ein schief abgeschnittener Cylinder.

§ 109. Gehen drei (oder mehr) Gerade, von denen jedoch nur je zwei in einer Ebene liegen, von einem Punkte aus (z. B. die drei in einer Zimmerecke zusammenstoßenden Kanten), so entsteht eine körperliche Ecke. Begrenzt man die körperliche Ecke durch eine Ebene, so entsteht eine Pyramide (Fig. 211). Die begrenzende Ebene heißt Grundfläche, die übrigen Seitenflächen der Pyramide; der gemeinsame Schnittpunkt aller Seitenflächen heißt Spitze, der (senkrechte) Abstand der Spitze von der Grundfläche Höhe. Alle Seitenflächen zusammengenommen bilden den Mantel, Mantel und Grundfläche die Oberfläche der Pyramide.

Die Seitenflächen einer Pyramide sind stets Dreiecke; die Grundfläche ist ein Dreieck (Fig. 211), Viereck (Fig. 232), Vieleck (Fig. 243), und demgemäß heißt die Pyramide eine drei-, vier-, vielseitige. In der dreiseitigen Pyramide kann jede Fläche als Grundfläche aufgefaßt werden.

§ 110. Legt man durch eine Pyramide einen zur Grundfläche parallelen Schnitt, so entsteht ein Pyramidenstumpf. Die beiden begrenzenden parallelen und ähnlichen (§ 66) Flächen heißen Grundflächen, die übrigen Seitenflächen des Pyramidenstumpfes, der (senkrechte) Abstand beider Grundflächen Höhe. Die Seitenflächen eines Pyramidenstumpfes sind stets Trapeze, die beiden Grundflächen Dreiecke, Vierecke (Fig. 234), Vielecke, und demgemäß heißt der Körper ein drei-, vier-, vielseitiger Pyramidenstumpf.

§ 111. Dreht sich eine Gerade (Erzeugende) um einen ihrer Punkte (Scheitel, Spitze), während sie an einem Kreise (Leitlinie) hingleitet, so entsteht eine Kegelfläche. Die Erzeugenden heißen Kegelseiten; die Verbindungsgerade der Spitze mit dem Mittelpunkte des Leitkreises heißt Kegelachse. Eine Ebene durch die Spitze einer Kegelfläche hat mit derselben einen Punkt (die Spitze), eine oder zwei Gerade gemeinsam, je nachdem dieselbe den Leitkreis in keinem, einem oder zwei Punkten trifft. Eine Ebene, welche mit einer Kegelfläche eine Seite gemein hat, heißt Berührungs- oder Tangentialebene des Kegels. Eine Ebene, welche eine Kegelfläche schneidet, jedoch nicht durch die Spitze derselben geht, trifft die Kegelfläche in einem Kreise bezw. einer Ellipse, einer Parabel oder Hyperbel, je nachdem sie zu keiner, einer oder zwei Kegelseiten parallel ist.

§ 112. Wird eine Kegelfläche von einer Ebene begrenzt, so entsteht ein Kegel (Fig. 212). Die begrenzende Ebene (Kreis oder Ellipse) heißt Grundfläche, die begrenzte Kegelfläche Mantel, der (senkrechte) Abstand der Spitze von der Grundfläche Höhe. Mantel und Grundfläche bilden die Oberfläche.

§ 113. Legt man durch einen Kegel eine zur Grundfläche parallele Ebene, so erhält man einen Kegelstumpf. Die beiden den Kegelstumpf begrenzenden

Digitized by Google

parallelen und ähnlichen Flächen (Kreise oder Ellipsen) heißen Grundflächen; die begrenzte Kegelfläche heißt Mantel, ihre Erzeugende Kegelstumpfseite, der Abstand der Grundflächen Höhe.

§ 114. Dreht sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser als Achse, bis er in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so beschreibt der Umkreis eine Kugelfläche, die Kreisfläche eine Kugel (Fig. 219). Der Mittelpunkt der Drehachse heißt Kugelmittelpunkt, die Entfernung eines Punktes der Kugelfläche vom Kugelmittelpunkt Radius, die Verbindungsgerade zweier Punkte der Kugelfläche Sehne, jede Sehne durch den Kugelmittelpunkt Durchmesser.

Alle Punkte der Kugelfläche haben, wie leicht ersichtlich, vom Kugelmittelpunkt gleiche Entfernung, d. h. alle Radien und also auch alle Durchmesser einer Kugel sind einander gleich.

Eine Ebene schneidet, berührt oder liegt ganz außerhalb einer Kugelfläche, je nachdem ihr (senkrechter) Abstand vom Kugelmittelpunkt kleiner, gleich oder größer als der Kugelradius ist.

§ 115. Lehrsatz. Die Schnittlinie einer Ebene und einer Kugelfläche ist ein Kreis (Fig. 219).

Beweis. Fällt man vom Kugelmittelpunkt m auf die Schnittebene die Senkrechte m a und verbindet irgend zwei Punkte der Schnittlinie b, c mit m und a, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke m b a und m c a, welche in der Hypotenuse m b = m c (Kugelradien) und der gemeinsamen Kathete m a übereinstimmen. Es müssen also, wie der pythagoräische Lehrsatz zeigt, auch die beiden Katheten a b und a c gleich sein; d. h. die Schnittlinie ist ein Kreis mit dem Mittelpunkte a, dem Radius a b.

Je kleiner der Abstand eines Schnittkreises vom Kugelmittelpunkt ist, um so größer ist die Kreisfläche. Die Schnittkreise durch den Kugelmittelpunkt sind die größten und heißen „größte Kugelkreise", alle übrigen „kleine Kugelkreise".

§ 116. Eine Ebene zerlegt die Kugelfläche in zwei Kugelkappen, die Kugel in zwei Kugelabschnitte (Fig. 247); zwei parallele Ebenen bestimmen auf der Kugelfläche einen Zonenmantel, auf der Kugel eine Zone (Fig. 246); denkt man sich auf den Kugelabschnitt (Fig. 246) einen Kegel gestellt, der den Kreis a h b zur Grundfläche und seine Spitze im Kugelmittelpunkt hat, so bilden Kugelabschnitt und Kegel zusammengenommen einen Kugelausschnitt.

§ 117. Unter regelmäßigen Körperecken versteht man Körper, welche von kongruenten regelmäßigen Vielecken (§ 25, 33), deren gleich viele in einer Ecke zusammenstoßen, begrenzt werden. Da die Winkel zwischen den auf einander folgenden Kanten einer Ecke zusammengenommen (z. B. ∢ a d c + a d b + b d c in Fig. 223) kleiner als 360° sein müssen, weil sonst die körperliche Ecke in eine Ebene übergeht, so können in einer Ecke nur zusammenstoßen:
1) drei gleichseitige Dreiecke (jeder Kantenwinkel 60°, zusammen $3 \times 60 = 180°$);
2) vier gleichseitige Dreiecke (Kantenwinkel je 60°, zusammen $4 \times 60 = 240°$);
3) fünf gleichseitige Dreiecke (Kantenwinkel je 60°, zusammen $5 \times 60 = 300°$);
4) drei Quadrate (Kantenwinkel je 90°, zusammen $3 \times 90 = 270°$);
5) drei regelmäßige Fünfecke (Kantenwinkel je $\frac{2 \times 5 - 4}{5} = \frac{6}{5}$ R $= 108°$, zusammen $3 \times 108 = 324°$).

Regelmäßige Vielecke mit mehr als fünf Seiten können keine Körperecke bilden, denn schon beim regelmäßigen Sechseck beträgt je ein Kanten-

Digitized by Google

winkel $\frac{2 \times 6 - 4}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ R = 120°; die 3 Kantenwinkel zusammen also $3 \times 120 = 360°$, was unmöglich ist, da die Summe der Kantenwinkel kleiner als 360° sein muß.

Demgemäß giebt es nur fünf regelmäßige Körper; diese sind:

1. Das Tetraeder. Dieser Körper wird von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je drei eine Ecke bilden (Fig. 213).
2. Das Oktaeder. Dieser Körper wird von acht gleichseitigen Dreiecken eingeschlossen, von denen je vier eine Ecke bilden (Fig. 214).
3. Das Ikosaeder. Dieser Körper wird von zwanzig gleichseitigen Dreiecken begrenzt, von denen je fünf eine Ecke bilden (Fig. 215).
4. Der Würfel (Kubus, Hexaeder). Dieser Körper wird von sechs Quadraten eingeschlossen, von denen je drei eine Ecke bilden (Fig. 216).
5. Das Dodekaeder. Dieser Körper wird von zwölf gleichseitigen Fünfecken begrenzt, von denen je drei eine Ecke bilden (Fig. 217).

Wie regelmäßige Vielecke einen Punkt (Mittelpunkt) besitzen, der von den Ecken gleiche Entfernung, von den Seiten gleichen Abstand hat, so haben auch diese regelmäßigen Körper einen Punkt (Mittelpunkt), der von den Eckpunkten gleiche Entfernung, von den Seitenflächen gleichen Abstand hat. Es lassen sich also in und um dieselben Kugel zeichnen, wie die Figuren 213—217 lehren.

§ 118. Körper heißen inhaltsgleich oder kurz gleich, wenn sie übereinstimmen in dem von ihren Grenzflächen eingeschlossenen Teile des Raumes.

§ 119. Cavalieri'sches Prinzip: Lassen sich Körper zwischen zwei parallele Ebenen legen, und werden sie von jeder zu diesen Ebenen parallele Ebene in gleich großen Flächen geschnitten, so sind die Körper inhaltsgleich.

§ 120. Lehrsatz. Prismen von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.

Beweis. Die Prismen Fig. 221 lassen sich, da sie gleiche Höhe haben, zwischen zwei parallele Ebenen legen. Schneidet man die Prismen durch eine zu den beiden Ebenen parallele Ebene, so sind die beiden Schnittflächen gleich, weil jede derselben ihrer Grundfläche kongruent ist (§ 104). Somit sind die Prismen selbst nach § 119 inhaltsgleich.

Ein vielseitiges Prisma ist also einem rechtwinkligen Parallelepipedon (§ 104) von gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich.

§ 121. Lehrsatz. Pyramiden von gleicher Grundfläche und Höhe sind gleich.

Beweis. Die Pyramiden lassen sich zwischen zwei parallele Ebenen legen, da sie gleiche Höhe haben. Schneidet man die Pyramiden durch eine zu den beiden Ebenen parallele Ebene, so ist jede Schnittfläche ihrer Grundfläche ähnlich (§ 110). Ähnliche Flächen verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken. Ist also der Abstand der Schnittflächen gleich $\frac{1}{5}$ oder $\frac{1}{7}$ oder $\frac{1}{m}$ des Abstandes der Grundflächen von der Spitze, so ist ihr Inhalt gleich $\frac{1}{25}$ bezw. $\frac{1}{49}$ bezw. $\frac{1}{m^2}$ des Inhaltes der entsprechenden Grundflächen. Da aber letztere gleich sind, so sind auch die betreffenden Schnittflächen gleichen Inhaltes, und somit die Pyramiden selbst nach § 119 inhaltsgleich.

§ 122. Lehrsatz. Eine dreiseitige Pyramide ist der dritte Teil eines dreiseitigen Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe.

Digitized by Google

Beweis. Wenn man durch die Ecken a, b, c des Prismas (Fig. 223), eine Schnittebene legt, so erhält man eine Pyramide a b c d, deren Höhe und Grundfläche gleich denen des Prismas sind; es wird dann noch die viereckige Pyramide a b c f e übrig bleiben, welche in a′ b′ c′ f′ e′ (Fig. 224) besonders dargestellt ist. Der Scheitel dieser Pyramide liegt in a′ und zur Grundfläche hat sie die hintere Fläche e f c b des Prismas. Legt man durch diese Pyramide die Ebene e′ a′ c′, so erhält man die beiden gleichen Pyramiden b′ e′ a′ c′ und e″ f″ a″ c″ (Fig. 225), (§ 121). Da die zuerst erhaltene Pyramide a b c d mit den beiden letzten b′ e′ a′ c′ und e″ f″ a″ c″ gleiche Grundfläche und Höhe hat, so ist eine jede derselben gleich dem dritten Teile des Prismas a b c d e f (Fig. 223).

Da sich vielseitige Prismen wie Pyramiden in dreiseitige zerlegen lassen, so ist auch eine vielseitige Pyramide der dritte Teil eines vielseitigen Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe.

§ 123. Ein Cylinder kann als ein Prisma, ein Kegel als eine Pyramide aufgefaßt werden, deren Grundflächen in einen Kreis bezw. Ellipse übergegangen sind. Daher:

Lehrsatz. Ein Kegel ist gleich dem dritten Teile eines Cylinders von gleicher Grundfläche und Höhe.

§ 124. Lehrsatz. Eine Kugel ist gleich dem umbeschriebenen Cylinder vermindert um den diesem Cylinder einbeschriebenen Doppelkegel (Fig. 227).

Beweis. Es sei a b c d (Fig. 227) der Cylinder, f e g die einbeschriebene Kugel, a b o c d der einbeschriebene Doppelkegel. o ist Mittelpunkt der Cylinderachse, der Kugel und Spitze beider Kegel. Legt man zur Grundfläche (Kreis) a b den parallelen Schnitt m n, so ist der Cylinderschnitt m n mit dem Radius m h = r nach § 85 = $r^2 \pi$. Der Kegelschnitt i p hat zum Radius i h = h o, weil i h o ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck ist, da es dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecke a e o ähnlich (§ 67); folglich ist der Kegelschnitt = $\overline{h\,o}^2 \pi$. Mithin ist Cylinderschnitt weniger Kegelschnitt = $r^2 \pi - \overline{h\,o}^2 \pi$. Der Kugelschnitt k q hat zum Radius k h. Nach dem pythagoräischen Lehrsatze ist $\overline{k\,h}^2 = \overline{k\,o}^2 - \overline{h\,o}^2 = r^2 - \overline{h\,o}^2$; also $\overline{k\,h}^2 \pi = r^2 \pi - \overline{h\,o}^2 \pi$, d. h. Kugelschnitt gleich Cylinderschnitt weniger Kegelschnitt. Nach dem Cavalieri'schen Prinzip folgt somit Kugel gleich umbeschriebenen Cylinder weniger dem diesem Cylinder einbeschriebenen Doppelkegel.

Von der Inhaltsberechnung der Körper.

§ 125. Den Inhalt eines Körpers suchen heißt die Summe von Raumeinheiten bestimmen, welche dem gegebenen Körper gleich sind. Als Raumeinheit dient das Kubikmeter, ein Würfel von 1 m Länge, 1 m Breite, 1 m Höhe.

§ 126. Ein Kubikmeter hat 1000 Kubikdecimeter, dieses hat 1000 Kubikcentimeter und dieses wieder 1000 Kubikmillimeter.

Die Bezeichnungen der metrischen Kubikmaße sind folgende:

Volle Bezeichnung.	Abgekürzte Bezeichnung.
Kubikmeter	cbm.
Kubikdecimeter oder Liter	cdm. oder l.
Kubikcentimeter	ccm.
Kubikmillimeter	cmm.

Digitized by Google

Das metrische Kubikmaß stellt sich übersichtlich so dar:

cbm.	cdm.	ccm.	cmm.
1 =	1 000 =	1 000 000 =	1 000 000 000
	1 =	1 000 =	1 000 000
		1 =	1 000.

§ 127. Da das Kubikmeter lauter rechte Winkel hat, so kann man mittelst desselben zunächst auch nur den Inhalt eines Körpers mit lauter rechten Winkeln d. h. eines rechtwinkligen Parallelepipedons ausmessen. Ist ein gerades Parallelepipedon z. B. ein Zimmer, 7 m lang, so lassen sich der Länge nach 7 cbm in dasselbe stellen. Ist der Körper 5 m breit, so erhält man 5 Reihen von je 7 cbm; und ist endlich das Parallelepipedon 3 m hoch, so hat man offenbar 3 Schichten zu je 5 Reihen von je 7 cbm d. h. $3 \times 5 \times 7$ cbm. Die Maßzahl des Inhaltes eines geraden Parallelepipedons ist also gleich dem Produkte der Maßzahlen dreier anstoßenden Kanten. Da jedoch das Produkt der Maßzahlen von Länge und Breite gleich der Maßzahl der Grundfläche ist, so drückt man, dem Lehrsatze (§ 79) entsprechend, den Satz kurz so aus:

Lehrsatz. Der Inhalt eines rechtwinkligen Parallelepipedons ist gleich Grundfläche mal Höhe $= G \cdot h$ (G Grundfläche, h Höhe).

§ 128. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines vielseitigen Prismas ist $= G \cdot h$ (G Grundfläche, h Höhe).

Beweis. Ein vielseitiges Prisma ist nach § 120 gleich einem rechtwinkligen Parallelepipedon von gleicher Grundfläche und Höhe.

§ 129. **Lehrsatz.** Der Inhalt einer Pyramide ist $= \frac{1}{3} G \cdot h$ (G Grundfläche, h Höhe).

Beweis. Eine Pyramide ist nach §§ 121 und 122 gleich dem dritten Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe.

§ 130. **Lehrsatz.** Der Inhalt eines schiefabgeschnittenen dreiseitigen Prismas ist $= \frac{a+b+c}{3} \cdot N$ (a, b, c sind die drei parallelen Seitenkanten, N ist der zu ihnen senkrechte Schnitt, Normalschnitt).

Beweis 1. Es sei die Grundfläche b d f (Fig. 230) dem Normalschnitte parallel. Legt man durch c die Ebene k c l ∥ b d f, so zerfällt der ganze Körper in ein dreiseitiges Prisma mit der Grundfläche b d f und der Höhe c und eine vierseitige Pyramide mit der Grundfläche a k l e, Spitze in c. Der Inhalt des Prismas ist $= \frac{g \cdot h}{2} \cdot c$, der Inhalt der Pyramide $= \frac{a-c+b-c}{2} \cdot g \cdot \frac{h}{3} = \frac{a+b-2c}{3} \cdot \frac{g \cdot h}{2}$; also der Inhalt des ganzen Körpers $= \left(\frac{a+b-2c}{3} + c\right) \cdot \frac{g \cdot h}{2} = \frac{a+b-2c+3c}{3} \cdot \frac{g \cdot h}{2} = \frac{a+b+c}{3} \cdot N.$

2. Es sei keine der Grundflächen dem Normalschnitte parallel, so erhält man dasselbe Resultat, wenn man den Körper durch einen Normalschnitt in zwei Prismen der Art 1 zerlegt und deren Inhalt addiert.

Digitized by Google

Den Inhalt eines schiefabgeschnittenen vielseitigen Prismas findet man durch Zerlegen desselben in dreiseitige; erfordert jedoch die Rechnung keine große Genauigkeit, so multipliziert man, wenn angängig, die mittlere Grundfläche mit der Höhe.

§ 131. Lehrsatz. Der Inhalt eines Pyramidenstumpfes ist $= \frac{G + g + \sqrt{G \cdot g}}{3} \cdot h$ (G, g Grundflächen, h Höhe).

Beweis.* Man zieht (Fig. 234) von der ganzen Pyramide mit der Grundfläche G und der Höhe $(h + x)$ die kleinere mit der Grundfläche g und der Höhe x ab.

In Fällen, die eine große Genauigkeit nicht erfordern, multipliziert man den mittleren Durchschnitt $\frac{G + g}{2}$ mit der Höhe h.

§ 132. Lehrsatz. Der Inhalt eines Cylinders ist $= G \cdot h$ (G Grundfläche, h Höhe).

Beweis. Der Cylinder kann aufgefaßt werden (§ 123) als ein Prisma, dessen Grundfläche zu einer Kurve, d. h. einem Vieleck mit unzählig vielen unendlich kleinen Seiten geworden ist.

Ist die Grundfläche des Cylinders (Fig. 210) ein Kreis, so ist der Inhalt $= r^2 \pi h$; ist dieselbe eine Ellipse, so ist der Inhalt $= a\, b\, \pi\, h$ (a, b Halbachsen der Ellipse, h Höhe).

§ 133. Lehrsatz. Der Inhalt eines Kegels ist $= \frac{1}{3} G \cdot h$ (G Grundfläche, h Höhe).

Beweis. Wie der Cylinder ein besonderer Fall des Prismas ist, so kann der Kegel (§ 123) als ein besonderer Fall der Pyramide angesehen werden.

Ist die Grundfläche des Kegels (Fig. 233) ein Kreis, so ist der Inhalt $= \frac{1}{3} r^2 \pi h$; ist die Grundfläche eine Ellipse, so ist der Inhalt $= \frac{1}{3} a\, b\, \pi\, h$.

§ 134. Lehrsatz. Der Inhalt eines Kegelstumpfes ist $= \frac{(G + g + \sqrt{G\,g})}{3} \cdot h$ (G, g Grundflächen, h Höhe).

Beweis. Der Kegelstumpf ist ein besonderer Fall des Pyramidenstumpfes. Sind die Grundflächen des Kegelstumpfes Kreise, so ist der Inhalt $= \frac{R^2 \pi + r^2 \pi + r R \pi}{3} \cdot h = (R^2 + r^2 + R r) \frac{\pi \cdot h}{3}$; sind die Grundflächen Ellipsen, so erhält man $\left(a\, b + A \cdot B + \sqrt{a \cdot b \cdot A \cdot B}\right) \cdot \frac{\pi \cdot h}{3}$

* Beweis. Pyramidenstumpf $= \frac{G\,(h+x)}{3} - \frac{g \cdot x}{3} = \frac{G\,h + G\,x - g\,x}{3} = \frac{G\,h + x\,(G-g)}{3}$. $\frac{G}{g} = \frac{(h+x)^2}{x^2}$; $\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} = \frac{h+x}{x}$; $x\sqrt{G} = h\sqrt{g} + x\sqrt{g}$; $x\sqrt{G} - x\sqrt{g} = h\sqrt{g}$; $x\left(\sqrt{G} - \sqrt{g}\right) = h\sqrt{g}$; $x\left(\sqrt{G} - \sqrt{g}\right)\left(\sqrt{G} + \sqrt{g}\right) = h\sqrt{g}\left(\sqrt{G} + \sqrt{g}\right)$; $x\,(G - g) = h\left(\sqrt{G\,g} + g\right)$. Dieses eingesetzt folgt: Pyramidenstumpf $= \frac{G\,h + h\sqrt{G\,g} + g\,h}{3} = \frac{G + g + \sqrt{G\,g}}{3} \cdot h$.

Digitized by Google

§ 135. **Lehrsatz.** Der Inhalt einer Kugel ist $= \frac{4}{3} r^3 \pi$.

Beweis. Nach § 124 ist eine Kugel gleich dem umbeschriebenen Cylinder vermindert um den diesem Cylinder einbeschriebenen Doppelkegel. Da der Cylinder einen Grundkreis mit dem Radius r, eine Höhe $= 2r$ besitzt, beide Kegel gleichfalls einen Grundkreis mit dem Radius r und eine Höhe $= r$ haben, so ist der Inhalt der Kugel $= r^2 \pi \cdot 2r - 2 r^2 \pi \cdot \frac{r}{3} = \frac{6 r^3 \pi}{3}$ $- \frac{2 r^3 \pi}{3} = \frac{4}{3} r^3 \pi$.

§ 136. **Lehrsatz.*** Der Inhalt eines Kugelabschnittes ist $= \frac{h^2 \pi}{3} (3r - h)$ (r Kugelradius, h Höhe des Abschnittes).

§ 137. **Lehrsatz.**** Der Inhalt eines Kugelausschnittes ist $= \frac{2}{3} r^2 \pi h$ (r Kugelradius, h Höhe des zugehörigen Kugelabschnittes).

Übungen.

1. Es sollen addiert werden: 12 cbm 120 cdm 140 ccm 218 cmm, 25 cbm 16 cdm 129 ccm 314 cmm und 4 cbm 188 cdm 16 ccm 10 cmm. § 126.

12	cbm	120	cdm	140	ccm	218	cmm
25	„	16	„	129	„	314	„
4	„	188	„	16	„	10	„
41	cbm	324	cdm	285	ccm	542	cmm.

2. Man vermehre 126 cbm 934 cdm 516 ccm 465 cmm um 140 cbm 226 cdm 840 ccm 574 cmm.

126	cbm	934	cdm	516	ccm	465	cmm
140	„	226	„	840	„	574	„
267	cbm	161	cdm	357	ccm	39	cmm.

3. Von 328 cbm 125 cdm 180 ccm sollen 114 cbm 412 cdm 270 ccm abgezogen werden:

328	cbm	125	cdm	180	ccm
114	„	412	„	270	„
213	cbm	712	cdm	910	ccm.

---

* **Beweis.** Wie der Inhalt der ganzen Kugel = Cylinder weniger Doppelkegel, so ist der Inhalt des Kugelabschnittes k e q (Fig. 227) = Cylinder a m n b weniger Kegelstumpf a i p b $= r^2 \pi h - \frac{h \pi}{3} [r^2 + r (r - h) + (r - h)^2] = \frac{h \pi}{3}$ $(3 r^2 - r^2 - r^2 + rh - r^2 + 2rh - h^2) = \frac{h^2 \pi}{3} (3r - h)$.

** **Beweis.** Kugelausschnitt = Kugelabschnitt vermehrt um zugehörigen Kegel (Fig. 227) $= keq + koq = \frac{h^2 \pi}{3} (3r - h) + \frac{[\sqrt{r^2 - (r - h)^2}]^2 \pi \cdot (r - h)}{3}$ $= \frac{h \pi}{3} (3rh - h^2) + \frac{h (2r - h) \pi (r - h)}{3} = \frac{h \pi}{3} (3rh - h^2 + 2r^2 - rh$ $- 2rh + h^2) = \frac{2}{3} r^2 \pi h$.

Digitized by Google

4. Es soll das 8fache von 6 cbm 12 cdm 234 ccm genommen werden.

6 cbm	12 cdm	234 ccm		
		× 8		
48 cbm	97 cdm	872 ccm.		

5. Wie viel ist das 12fache von 9 cbm 162 cdm 642 ccm?

9 cbm	162 cdm	642 ccm			
		× 12			
18 „	325 „	284 „			
91 „	626 „	42 „			
109 cbm	951 cdm	704 ccm.			

6. 14 Kubikmeter 345 Kubikdecimeter sollen in 5 gleiche Teile geteilt werden.

14345 : 5 = 2869 Kubikdecimeter oder 2 cbm 869 cdm.

10
43
40
34
30
45
45

7. 8 Kubikmeter 124 Kubikmillimeter sollen in 6 gleiche Teile geteilt werden.

Die fehlenden Kubikdecimeter und Kubikcentimeter werden hier durch Nullen ersetzt.

8 000 000 124 : 6 = 1 333 333 354 cmm = 1 cbm 333 cdm 333 ccm 354 cmm.

§ 127. 8. Den Kubikinhalt eines Würfels zu finden, dessen Seite 1 Meter 45 Centimeter lang ist.

Man multipliziert die Grundfläche (145 × 145 qcm) mit der Höhe (145 cm). Inhalt = 145 × 145 × 145 = 3048625 ccm = 3 cbm 48 cdm 625 ccm.

9. Den Kubikinhalt einer Mauer zu finden, welche 5 m lang, 0,5 m stark und 4 m hoch ist.

Man berechnet den Quadratinhalt der Grundfläche = 5 × 0,5 qcm und multipliziert diesen mit der Höhe = 4 m. Inhalt = 5 × 0,5 × 4 = 10 cbm.

10. Ein Ziegelstein ist 25 cm lang, 12 cm breit, $6\frac{1}{2}$ cm stark, wie viel Kubikcentimeter enthält derselbe? Inhalt = 25 × 12 × $6\frac{1}{2}$ = 1950 ccm.

11. Wie viel Kubikmeter enthält ein vierkantiges Stück Holz, welches 35 cm breit, 15 cm hoch und 6,4 m lang ist? Inhalt = 0,336 cbm.

12. Wie viel Kubikmeter hält ein Fundamentgraben, welcher 21,25 m lang, 1,32 m breit und 9 m tief ist? Inhalt = 21,25 × 1,32 × 9 = 252,45 cbm.

13. Wie viel Kubikmeter enthält ein rechtwinkliges Blechgefäß, welches 1,3 m lang, 0,65 m breit und 1,15 m hoch ist? Inhalt = 1,3 × 0,65 × 1,15 = 0,97175 cbm.

Digitized by Google

14. Wie viel Kubikmeter Mauerwerk enthält Vorder- und Rückwand des unteren Stockwerkes eines Wohngebäudes, welches 15 m Länge, 4 m Höhe hat und 2 Stein oder 51 cm stark ist. Es befinden sich sowohl in der vorderen wie in der hinteren Mauer eine Thür und vier Fenster, erstere von 2,5 m Breite und 3,3 m Höhe, letztere von 1,2 m Breite und 2,2 m Höhe.

Man sucht den Inhalt der ganzen vorderen Fläche, zieht dann den Flächeninhalt der Fenster und Thür davon ab und multipliziert den Rest mit der Dicke der Mauern.

Es hält die ganze Fläche der vorderen Mauer nach den oben angegebenen Maßen = 60 qm; der Flächeninhalt der 4 Fenster = 10,56 qm; die Fläche der Thür = 8,25 qm, mithin Fenster und Thür zusammen = 18,81 qm; dieses von dem Inhalt der ganzen Fläche = 60 qm abgezogen ergiebt 41,19 qm Mauerfläche. Wird die Mauerfläche mit 0,51 m, gleich der Dicke der Mauer, multipliziert, so erhält man 21,0069 cbm = dem gesuchten Inhalt der vorderen Mauer.

Da die hintere Mauer der vordern in der Größe der Fenster und Thüren gleich ist, so wird der Inhalt doppelt genommen.

Die Schmiegen bei Fenstern und Thüren kommen bei Ausrechnung der Mauer nicht in Betracht, weil durch das Behauen der Steine eben so viel Material verloren geht, als man gebrauchen würde, wenn die Pfeiler rechtwinklig aufgemauert würden.

15. Ein Kornboden hat 20 m Länge, 15 m Breite und eine Tragfähigkeit von 1050 Tonnen. Wie hoch kann derselbe mit Weizen beschüttet werden, wenn 1 hl 75 kg wiegt und der siebente Teil der Tragfähigkeit nicht überschritten werden darf? Höhe = 0,67 m.

16.* Ein Kanalschiff von parallelepipedischer Form ist 30 m lang, 4 m breit und 1,5 m tief. Wie groß ist die zulässige Belastung, wenn das Schiff ohne Ladung 0,25 m tief einsinkt und mit Ladung 0,10 m Bordhöhe hat? Gewicht des leeren Schiffes $30 \times 4 \times 0{,}25 = 30$ Tonnen. Gewicht des belasteten Schiffes $= 30 \times 4 \times 1{,}4 = 168$ Tonnen, also Ladung $= 168 - 30 = 138$ Tonnen.

17.** Ein 16 m langes, 12 m breites flaches Dach ist 0,50 m hoch mit Schnee belastet. Wie groß ist der Schneedruck, wenn das spezifische Gewicht des Schnees 0,16 ist? Gewicht des Schnees $= 16 \times 12 \times 0{,}50 \times 0{,}16 = 15{,}360$ Tonnen.

18. Mauern mit Böschungen oder Schmiegen (Fig. 228) lassen sich ebenfalls als Prismen berechnen, deren Durchschnittsflächen aus Trapezen bestehen. § 128.

Es sei z. B. eine Mauer 12 m lang, 4 m hoch, unten 1,8 m und oben 1,2 m breit, so ist der Inhalt $= \frac{1{,}8 + 1{,}2}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 72$ cbm.

19. Ein behauener Granitstein (Fig. 229) sei 2,5 m lang und 1,7 m hoch, unten 1,4 m und oben 1,2 m breit, wie viel Kubikmeter wird derselbe enthalten?

---

* Ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper verliert so viel an Gewicht, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit beträgt.

** Das spezifische Gewicht eines Körpers ist das Gewicht der Raumeinheit (1 cdm).

Digitized by Google

Man berechnet die Durchschnittsfläche als ein Trapez, dessen parallele Seiten 1,4 m und 1,2 m und dessen Höhe 1,7 m beträgt $= \frac{1,4+1,2}{2} \times 1,7 = 2,21$ qm; dieses mit der Länge des Steins 2,5 m multipliziert, giebt: Inhalt $= 5,525$ cbm.

§ 129. 20. Den Kubikinhalt einer Pyramide von quadratischer Grundfläche zu finden, wenn die Grundkante 0,8 m, die Höhe 0,6 m beträgt. Inhalt $= \frac{0,8 \times 0,8 \times 0,6}{3} = 0,128$ cbm.

21. Ein Grabstein besteht aus einem 2 m hohen Prisma mit quadratischer Grundfläche und aus einer 0,60 m hohen Pyramide. Wie schwer ist derselbe, wenn das spezifische Gewicht gleich 2,7 und die Grundkante 0,50 m beträgt? Inhalt des Prisma $= 0,5 \times 0,5 \times 2 = 0,50$ cbm, Inhalt der Pyramide $= \frac{0,5 \times 0,5 \times 0,6}{3} = 0,05$ cbm, Inhalt des Grabsteines $= 0,50 + 0,05 = 0,55$ cbm, Gewicht desselben $= 0,55 \times 2,7 = 1,485$ Tonnen $= 1485$ kg.

§ 130. 22. Die parallelen Kanten eines dreiseitig schief abgeschnittenen Prismas haben 5 m, 4 m, 3,6 m Länge; der Normalschnitt besitzt 2,3 qm Fläche. Wie groß ist der Inhalt? Inhalt $= \frac{5+4+3,6}{3} \; 2,3 = 9,66$ cbm.

23. Ein 12 m langes, 8 m breites Walmdach hat eine Höhe von 5 m und eine Firstlänge von 9 m. Wie groß ist der Dachraum?

Inhalt $= \frac{12+12+9}{3} \cdot \frac{8 \times 5}{2} = 11 \times 20 = 220$ cbm.

24. Über einen Eisenbahndamm, der durch eine 5 m hohe Futtermauer begrenzt wird, eine 4 m breite Wegrampe mit $5\frac{0}{0}$ Steigung so zu führen, daß die Böschungsanlage $1 : 1\frac{1}{2}$ (d. h. 1 m Höhe entspricht $1\frac{1}{2}$ m wagerechte Auslage) wird. Wie viel cbm Erde sind hierzu erforderlich? Bei $5\frac{0}{0}$ Steigung ist die horizontale Weglänge das 20fache der Höhe, mithin $= 20 \times 5 = 100$ m. Der Normalschnitt hat also $\frac{100 \times 5}{2} = 250$ qm. Die parallelen Kanten betragen an der Wegkrone 4 m und 4 m, am Fuße der Futtermauer $4 + 2 \cdot 1\frac{1}{2} \cdot 5 = 19$ m; folglich Inhalt der Wegrampe $= \frac{4+4+19}{3} \cdot 250 = 2250$ cbm.

25. Zum Messen von Kalk, Sand u. s. w. bedient man sich eines Meßkastens, dessen obere Kanten 0,8/1,2 m, dessen untere Kanten 1,2/1,6 m betragen. Wie hoch muß derselbe sein, wenn er einen Kubikmeter fassen soll? Man zerlege den Kasten in zwei schief abgeschnittene Prismen oder berechne den mittleren Querschnitt. Höhe $= 0,71$ m.

§ 131. 26. Bei einem quadratischen Pyramidenstumpf beträgt die untere Kante 12 m, die obere 8 m und die Höhe 10 m. Wie groß ist der Inhalt?

Inhalt $= \frac{12^2 + 8^2 + \sqrt{12^2 \cdot 8^2}}{3} \cdot 10 = 1013,33$ cbm.

27. Wie schwer ist ein quadratischer Pyramidenstumpf aus Granit, wenn die untere Kante 0,8 m, die obere 0,6 m, die Höhe 3 m und das spezifische Gewicht 2,7 beträgt? Gewicht $= \frac{0,8^2 + 0,6^2 + \sqrt{0,8^2 \cdot 0,6^2}}{3} \cdot 3 \cdot 2,7 = 3,996$ Tonnen.

Digitized by Google

28. Eine Walze ist 5 m hoch und hat 1,5 m im Durchmesser; wie groß ist der Kubikinhalt? § 132.

Die Grundfläche, welche einen Kreis bildet, ist $= 0{,}75 \times 0{,}75 \times 3{,}14 = 1{,}7663$ qm. Der Inhalt $= 1{,}7663 \times 5 = 8{,}8315$ cbm.

29. Eine runde Säule ist 6,5 m hoch und hat 0,8 m Durchmesser, wie groß ist der Kubikinhalt? Inhalt $= 0{,}4 \times 0{,}4 \times 3{,}14 \times 6{,}5 = 3{,}2656$ cbm.

30. Ein Cylinder hat 1,8 m im Umkreise und 4,2 m Länge; wie groß ist der Kubikinhalt? Inhalt $= 1{,}083$ cbm.

Man berechnet aus dem Umkreis den Durchmesser und verfährt im Übrigen wie bei der vorigen Aufgabe.

31. Wie groß ist der Kubikinhalt des Mauerwerks eines Brunnens, wenn dessen innere Weite $= 1{,}4$ m, die Dicke der Brunnenmauer $= 0{,}14$ m und die Tiefe $= 8$ m beträgt? Inhalt $= 5{,}4158$ cbm.

Man berechnet erst den Inhalt des ganzen Brunnens, dann den des inneren Raumes und zieht letzteren von ersterem ab.

32. Den Literinhalt eines cylindrischen Gefäßes, welches 0,6 m im Durchmesser und 1,4 m Höhe hat, zu finden. Inhalt $= 0{,}3 \times 0{,}3 \times 3{,}14 \times 1{,}4 = 0{,}39564$ cbm $= 395{,}64$ Liter.

33. Den Literinhalt eines cylindrischen Gefäßes, welches 0,3 m im Durchmesser und 0,7 m Höhe hat, zu finden. Inhalt $= 0{,}15 \times 0{,}15 \times 3{,}14 \times 0{,}7 = 0{,}0495$ cbm $= 49{,}5$ Liter.

34. Ein kreisrundes cylindrisches Gefäß soll bei 0,8 m Durchmesser 850 Liter enthalten, wie hoch muß dasselbe sein? Der Inhalt der Grundfläche ist rund 0,50 qm. Da nun 1 Liter $= 0{,}001$ cbm ist, so geben 850 Liter 0,850 Kubikmeter; dividiert man dieses durch die Grundfläche 0,50, so erhält man die Höhe $= 1{,}7$ m.

35. Den Kubikinhalt eines Kegels (Fig. 233) zu finden, bei dem der Durchmesser a b der Grundfläche $= 0{,}4$ m und die Höhe c e $= 6$ m beträgt. § 133.

$$\text{Inhalt} = \frac{0{,}2 \times 0{,}2 \times 3{,}14 \times 0{,}6}{3} = 0{,}02512 \text{ cbm.}$$

36. Wie groß ist der Rauminhalt eines Kegels, wenn die Höhe 1,5 m und der Durchmesser der Grundfläche 0,8 m beträgt? Inhalt $= 0{,}2512$ cbm.

37. Die Höhe eines Kegels ist 12 dm, die Seite desselben 13 dm. Wie groß ist der Radius der Grundfläche und der Inhalt? Radius $= 5$ dm. Inhalt $= 314$ cdm.

38. Ein kegelförmiges Turmdach hat eine Seitenlänge von 5,3 m, eine Höhe von 4,5 m. Wie groß ist der Durchmesser der Grundfläche und der Inhalt? Durchmesser $= 5{,}6$ m; Inhalt $= 36{,}9264$ cbm.

39. Ein Glastrichter hat einen Durchmesser von 1,4 dm, eine Seitenlänge von 2,5 dm. Wie viel Liter faßt derselbe? Inhalt $= 1{,}23$ l.

40. Ein Glastrichter hat einen Durchmesser von 1,8 dm und faßt 0,8478 l. Wie groß ist die Höhe desselben? Höhe $= 1$ dm.

41. Ein kegelförmiges Zeltdach hat eine Höhe von 3 m und einen Inhalt von 12,56 cbm. Welchen Durchmesser hat der Grundkreis? Durchmesser $= 4$ m.

42. Ein Kegel mit elliptischer Grundfläche hat eine Höhe von 6 dm, die Achsen der Grundfläche messen 10 und 8 dm. Wie groß ist der Inhalt? Inhalt $= 125{,}6$ cdm.

Digitized by Google

§ 134. 43. Ein Kegelstumpf hat 3 dm Höhe und 8 bezw. 6 dm Durchmesser. Wie groß ist der Inhalt? Inhalt $= \frac{4^2 + 3^2 + 4.3}{3} 3{,}14.3 = 116{,}18$ cdm.

44. Ein kreisförmiges Bassin, dessen oberer Durchmesser 36 m und dessen Tiefe 2 m beträgt, soll mit 2facher Böschungsanlage ausgehoben werden. Wie teuer stellt sich der Aushub, wenn pro cbm ℳ 0,60 gezahlt wird? Kosten $= \frac{18^2 + 14^2 + 18.14}{3} \times 3{,}14 \times 2 \times 0{,}60 = 969{,}63$ ℳ

oder $16^2 \times 3{,}14 \cdot 2 \cdot 0{,}60 = 964{,}61$ ℳ

45. Ein Baum ist am Stammende 0,35 m im Durchmesser, am Zopfende 0,25 m und 25 m lang. Wie groß ist der Inhalt? Der mittlere Durchmesser = 0,3 m und die Durchschnittsfläche $0{,}15 \times 0{,}15 \times 3{,}14 = 0{,}07065$ qm; diese mit der Länge von 25 m multipliziert ergiebt $25 \times 0{,}07065 = 1{,}766$ cbm Inhalt.

46. Wie groß ist der Kubikinhalt des Mauerwerkes eines runden Turmes, dessen lichte Weite unten 10 m und oben 8 m beträgt, wenn die Mauer unten 1 m, oben 0,6 m stark und 16 m hoch ist?

Man berechnet erst den ganzen Raum, den der Turm einnimmt, dann den inneren leeren Raum, und zieht letzteren von ersterem ab.

Der ganze Raum hat $10 + 1 + 1 = 12$ m unteren und $8 + 0{,}6 + 0{,}6 = 9{,}2$ m oberen Durchmesser, folglich: $(6 \times 6 + 4{,}6 \times 4{,}6 + 6 \times 4{,}6) \frac{3{,}14 \times 16}{3} = 1419{,}447$ cbm Inhalt; der innere leere Raum hat $= (5 \times 5 + 4 \times 4 + 5 \times 4) \frac{3{,}14 \times 16}{3} = 1021{,}547$ cbm Inhalt, mithin beträgt das ganze Mauerwerk 397,900 cbm.

47. Ein Gefäß hat die Gestalt eines Kegelstumpfes. Der obere Durchmesser beträgt 2,2 m, der untere 2,6 m, die Höhe 1,5 m. Wie viel Liter faßt dasselbe? Mittlerer Durchmesser = 2,4 m, Inhalt $= 1{,}2 \times 1{,}2 \times 3{,}14 \times 1{,}5 = 6{,}7824$ cbm $= 6782{,}4$ l.

48. Eine Schüssel hat zum oberen Durchmesser 27 cm, zum untern 9 cm und enthält 1 Liter. Wie tief ist dieselbe? Mittlerer Durchmesser = 18 cm, Höhe $= \frac{1}{0{,}9^2 \cdot 3{,}14} = 0{,}393$ dm $= 3{,}93$ cm.

§ 135. 49. Eine Kugel hat einen Durchmesser von 4 cm. Der Inhalt ist zu bestimmen. Inhalt $= 4 \cdot \frac{2^3 \cdot 3{,}14}{3} = \frac{4 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3{,}14}{3} = 33{,}493$ ccm.

50. Wie schwer ist eine Kegelkugel aus Buchsbaumholz von 2 dm Durchmesser, wenn das spezifische Gewicht des Buchsbaumes = 0,9 gesetzt wird? Gewicht $= \frac{4 \times 1^3 \cdot 3{,}14 \times 0{,}9}{3} = 3{,}768$ kg.

51. Wie schwer ist eine Kugel von 6 dm Durchmesser, die gerade zur Hälfte in Wasser einsinkt? Die verdrängte Wassermasse hat die Form einer Halbkugel von 6 dm Durchmesser. Inhalt derselben $= \frac{4 \times 3^3 \times 3{,}14}{2 \times 3} =$ 56,52 cdm $= 56{,}52$ l, also wiegt die Kugel 56,52 kg. (Vergl. Aufgabe 16.)

Digitized by Google

52. Es sei ein halbrundes Nischengewölbe 1 m im Durchmesser; wie groß ist der Inhalt des durch dasselbe gebildeten hohlen Raumes, des obern halbrund zugewölbten Teils der Nische, wenn solcher von der vollen Mauer, worin sich das Gewölbe befindet, abgezogen werden soll?

Man berechnet erst den Inhalt der ganzen Kugel, und da die Nische der vierte Teil einer Kugel ist, so dividiert man das Produkt durch 4. Der Inhalt der Kugel ist $\frac{4 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 \times 3{,}14}{3} = 0{,}52$ cbm; das Produkt durch 4 geteilt giebt 0,13 cbm als Nischeninhalt.

53. Wie groß ist der Inhalt eines Kugelabschnittes von der Höhe $h = 3$ cm, § 136. wenn der Durchmesser der Kugel 8 cm beträgt? Inhalt $= \frac{3 \times 3 \times 3{,}14}{3}$ $(3 \times 4 - 3) = 84{,}78$ ccm.

54 Ein Raum ist mit einer Kappe von der Form eines Kugelabschnittes überwölbt. Wie groß ist dieser hohle Raum, wenn seine Höhe 1,2 m und der Radius der Kugel 3 m beträgt? Raum $= \frac{1{,}2 \times 1\,2 \times 3{,}14}{3}$ $(3 \times 3 - 1{,}2) = 11{,}756$ cbm.

55. Eine Nische hat die Form eines halben Kugelabschnittes. Den Inhalt derselben zu bestimmen, wenn der Kugelabschnitt 0.3 m Höhe hat und der Kugelradius 0,5 m beträgt. Inhalt $= \frac{0{,}3 \times 0{,}3 \times 3{,}14}{2 \times 3}$ $(3 \times 0{,}5 - 0{,}3) =$ 0,0565 cbm.

56. Ein Kugelausschnitt hat 2 cm Höhe; der Durchmesser der Kugel beträgt § 137. 12 cm. Wie groß ist der Inhalt? Inhalt $= \frac{2 \times 6 \times 6 \times 3{,}14 \times 2}{3} =$ 150,72 cbm.

57. Was wiegt ein eiserner Kugelausschnitt von 6 cm Höhe, wenn der Kugeldurchmesser 20 cm und das spezifische Gewicht 7,8 beträgt? Gewicht = 9,797 kg.

58. Den Kubikinhalt der regelmäßigen Körper zu bestimmen.

Diese Körper lassen sich in Pyramiden zerlegen und als solche berechnen.

1. Das Tetraeder ist eine Pyramide.

2. Das Oktaeder kann in zwei gleiche Pyramiden zerlegt werden; man berechnet also eine und verdoppelt das Produkt.

3. Das Ikosaeder kann in zwanzig gleiche Pyramiden zerlegt werden; man berechnet also den Inhalt einer und multipliziert das Produkt mit 20.

4. Der Würfel ist ein rechtwinkliges Parallelepipedon.

5. Das Dodekaeder besteht aus zwölf gleichen fünfeckigen Pyramiden; man berechnet den Inhalt einer und multipliziert das Produkt mit 12.

59. Den Kubikinhalt unregelmäßiger Körper zu finden.

Diese Körper lassen sich am leichtesten berechnen, wenn man sie in ein cylindrisches, mit Wasser gefülltes Gefäß taucht, und bemerkt, um wieviel das Wasser gestiegen ist. Der Raum des Wassers ist an Inhalt dem Körper gleich.

60. Dreht man eine Parabel (Fig. 238) um ihre Achse, so beschreibt dieselbe einen Körper, den man Paraboloid nennt. Den Kubikinhalt des Paraboloides findet man, wenn man die Grundfläche c d e f mit der halben Höhe g h

Digitized by Google

multipliziert. Ist z. B. $ce = 0{,}1$ m, $gh = 0{,}16$ m, so ist der Kubikinhalt $= \frac{0{,}05 \times 0{,}05 \times 3{,}14 \times 0{,}16}{2} = 0{,}628$ cdm.

61. Den Inhalt einer Tonne zu finden.

Die Länge der Tonne sei 1,4 m, die Spundtiefe d. h. der Durchmesser am Spund 0,8 m und der Durchmesser am Boden 0,5 m.

Man multipliziert die Spundtiefe 0,8 mit 2, addiert dazu die Bodentiefe 0,5, dividiert das Resultat 2,1 durch 3 und betrachtet die Tonne als einen Cylinder von 0,7 m Durchmesser, 1,4 m Höhe. Inhalt dieses Cylinders = 538,51 Liter.

Von der Oberflächenberechnung der Körper.

§ 138. Lehrsatz. Der Mantel eines Prismas ist gleich $s \times U$ [s Seitenkante, U Umfang des Normalschnittes] (Fig. 239).

Beweis. Die Seitenflächen eines Prismas sind sämtlich Parallelogramme (§ 104) mit derselben Grundlinie s, der Seitenkante; die zu s senkrechten Höhen der einzelnen Parallelogramme bilden den Umfang des Normalschnittes; daher Mantel $= s \times U$.

§ 139. Der Mantel eines Cylinders ist $= s \times U$ [s Seitenkante, U Umfang des Normalschnittes] (Fig. 244).

Beweis. Der Mantel kann in unzählig viele sehr kleine Parallelogramme mit der gleichen Grundlinie s, der Seitenkante, zerlegt werden. Die Höhen dieser einzelnen Parallelogramme bilden den Umfang des Normalschnittes.

§ 140. Eine genaue Berechnung ist nur möglich, wenn der Normalschnitt ein Kreis ist und wird alsdann $U \times s = 2r\pi s$. Die Oberfläche (§ 107) ist gleich dem Mantel und den beiden Grundflächen zusammengenommen. Sind Normalschnitt und Grundflächen Kreise, so ist die Oberfläche $= 2r\pi s + 2r^2\pi = 2r\pi(r+s)$; ist der Normalschnitt ein Kreis, die Grundflächen Ellipsen, so ist die Oberfläche $= 2r\pi s + 2ab\pi = 2\pi(rs + ab)$.

§ 141. Um den Mantel eines schiefabgeschnittenen Prismas (§ 105), einer Pyramide (§ 109), eines Pyramidenstumpfes (§ 110) zu finden, muß man die Seitenflächen (Paralleltrapeze bezw. Dreiecke) einzeln berechnen und die gefundenen Werte alsdann addieren. Haben indes die Seitenflächen einer Pyramide oder eines Pyramidenstumpfes sämtlich gleiche Höhe, so multipliziert man die halbe Summe der Grundlinien mit der Höhe.

§ 142. Die Berechnung des Mantels eines Kegels (§ 112) ist nur in dem Falle eine einfache, daß 1) die Grundfläche ein Kreis ist, 2) die Spitze von den Punkten dieses Umkreises gleiche Entfernung hat. Für diesen Fall des sogenannten geraden Kreiskegels gilt der

Lehrsatz: Der Mantel eines geraden Kreiskegels ist $= r\pi s$ (r Radius des Grundkreises, s Seitenkante).

Beweis. Der Mantel läßt sich in unzählig viele sehr kleine Dreiecke mit derselben Höhe s zerlegen. Der Gesamtinhalt dieser Dreiecke ist deshalb gleich der halben Summe ihrer Grundlinien $\frac{2r\pi}{2}$ multipliziert mit der Höhe $s = r\pi s$.

Die Oberfläche ist gleich Mantel und Grundfläche $= r\pi s + r^2\pi = r\pi(r+s)$.

Digitized by Google

§ 143. Die Bestimmung des Mantels eines Kegelstumpfes ist wie beim Kegel nur dann eine einfache, wenn der Stumpf ein Teil eines geraden Kreiskegels ist. In diesem Fall gilt der

Lehrsatz: Der Mantel eines geraden Kreiskegelstumpfes ist $= s\,\pi\,(R + r)$ (s Kegelstumpfseite, R, r Radien der Grundkreise).

Beweis. Der Mantel kann in unzählig viele sehr kleine Paralleltrapeze mit gemeinsamer Höhe s zerlegt werden. Den Inhalt derselben findet man, wenn man die halbe Summe ihrer Grundlinien $\frac{2\,R\,\pi + 2\,r\,\pi}{2}$ mit der Höhe s multipliziert. Daher Mantel $= (R\,\pi + r\,\pi)\,s = s\,\pi\,(R + r)$.

Die Oberfläche ist gleich dem Mantel und den beiden Grundflächen $= s\,\pi\,(R + r) + R^2\,\pi + r^2\,\pi = \pi\,[R^2 + r^2 + s\,(R + r)]$.

§ 144. Lehrsatz. Die Oberfläche einer Kugel ist $= 4\,r^2\,\pi = d^2\,\pi$ (r Kugelradius, d Kugeldurchmesser).

Beweis. Man faßt die Kugel auf als bestehend aus unzählig vielen unendlich kleinen Pyramiden, deren Spitzen im Kugelmittelpunkt liegen, und deren Grundflächen die Kugelfläche ausfüllen. Die Pyramiden haben die gemeinsame Höhe r, und da ihr Gesamtinhalt $= \frac{4}{3}\,r^3\,\pi$ ist, so folgt als Gesamtoberfläche d. h. als Kugelfläche: $\frac{4}{3}\,r^3\,\pi$ dividiert durch $\frac{r}{3} = 4\,r^2\,\pi = d^2\,\pi$.

§ 145. Lehrsatz. Der Inhalt einer Kugelkappe ist $= 2\,r\,\pi\,h$ (r Kugelradius, h Höhe der Kappe) (Fig. 246).

Beweis. Zerlegt man, wie in § 144, den Kugelausschnitt (§ 137) in unzählig viele sehr kleine Pyramiden mit der Spitze im Kugelmittelpunkt, mit den Grundflächen auf der Kappe, so folgt wie § 144 der Inhalt der Kappe $= \frac{2}{3}\,r^2\,\pi\,h$ dividiert durch $\frac{r}{3} = 2\,r\,\pi\,h$.

§ 146. Lehrsatz. Der Inhalt eines Zonenmantels ist $= 2\,r\,\pi\,h$ (r Kugelradius, h Höhe der Zone) (Fig. 246).

Beweis. Der Inhalt des Zonenmantels ist gleich dem Unterschiede der Inhalte zweier Kappen f d a c b e g und a c b, also $= 2\,r\,\pi\,(h + h_1) - 2\,r\,\pi\,h_1 = 2\,r\,\pi\,h$.

Übungen.

1. Ein 4 m langes Abfallrohr hat einen rechteckigen Querschnitt von 0,30 m Länge und 0,20 m Breite. Wie viel Quadratmeter Bretter sind hierzu erforderlich? Normalschnitt $U = 2 \times 0{,}30 + 2 \times 0{,}20 = 1$ m Umfang. Mantel $= s \times U = 4 \times 1 = 4$ qm. § 138.

2. Eine Kiste ist 1,20 m lang, 0,60 m breit und 0,80 m hoch. Wie viel Quadratmeter Bretter waren zur Herstellung nötig? Normalschnitt $U = 2 \times 1{,}20 + 2 \times 0{,}60 = 3{,}60$ m Umfang. Mantel $= s \times U = 0{,}80 \times 3{,}60 = 2{,}88$ qm. Boden und Deckel $= 2 \times 1{,}20 \times 0{,}60 = 1{,}44$ qm. Oberfläche $= 2{,}88 + 1{,}44 = 4{,}32$ qm.

3. Ein Dachraum hat 11 m Tiefe, 4,8 m Höhe und 18 m Länge. Wie viel Quadratmeter Bretter sind erforderlich, um Boden und Dachflächen zu belegen? Dachlänge $= \sqrt{5{,}5^2 + 4{,}8^2} = 7{,}3$ m. Umfang des Normalschnittes $= 11 + 7{,}3 + 7{,}3 = 25{,}6$ m. Mantel $= s \times U = 18 \times 25{,}6 = 460{,}8$ qm.

Digitized by Google

§ 140. 4. Wie viel Quadratmeter Blech sind zu einem Abfallrohr erforderlich, welches 0,12 m im Durchmesser und 14 m lang ist? Der Umkreis des Normalschnittes ist $= 0{,}12 \times 3{,}14 = 0{,}377$ m, dieses mit der Länge multipliziert giebt $0{,}377 \times 14 = 5{,}278$ qm Flächeninhalt.

5. Eine Walze von 0,2 m Durchmesser und 1,5 m Höhe soll mit Mahagoniholz fourniert werden. Wie viel Quadratmeter Fourniere sind dazu erforderlich? Anzahl $= 0{,}942$ qm.

6. Ein halbkreisförmiges Tonnengewölbe von 8 m Durchmesser und 20 m Länge soll verputzt werden; die Putzfläche zu berechnen. Fläche $= \frac{8 \times 3{,}14 \times 20}{2}$ $= 251{,}20$ qm.

7. Wie teuer stellt sich der Anstrich eines Stichbogengewölbes von 6 m Spannweite und 12 m Länge, wenn der zum Bogen gehörige Centriwinkel 60° mißt und pro Quadratmeter 1,80 ℳ berechnet wird?

$$\text{Kosten} = \frac{2 \times 6 \times 3{,}14 \times 12 \times 1{,}80}{6} = 135{,}65 \text{ ℳ}$$

§ 141. 8. Wie viel Quadratmeter enthält die Grundfläche nebst den kongruenten Seitenflächen der vierseitigen Pyramide (Fig. 242), wenn a b $= 0{,}8$ m und d c $= 0{,}9$ m ist? Die vier Seiten enthalten 1,44 qm und die Grundfläche 0,64 qm, also Oberfläche $= 2{,}08$ qm.

9. Ein 2,6 m hohes sechsseitiges Dach (Fig. 243), jede Seite 4,2 m lang, soll mit Zinkblech gedeckt werden; wie viel Quadratmeter enthält die Dachfläche? Es ist $ef = \sqrt{4{,}2^2 - 2{,}1^2} = 3{,}63$ m, und $ed = \sqrt{3{,}63^2 + 2{,}6^2} = 4{,}53$ m, folglich der Inhalt einer Seitenfläche $= \frac{4{,}2 \times 4{,}53}{2} = 9{,}513$ qm, und dieses 6 mal genommen $= 57{,}078$ qm $=$ dem Inhalt des ganzen Daches.

10. Ein Walmdach ist 18 m lang, 8,40 m breit und 4 m hoch und mißt im First 9,60 m. Wie groß ist die Dachfläche? Die Höhe sämtlicher Seitenflächen $= \sqrt{4{,}2^2 + 4^2} = 5{,}80$ m. Beide Trapeze halten $\frac{2 \times (18 + 9{,}60) \times 5{,}80}{2} =$ 160,08 qm; beide Dreiecke $\frac{2 \times 8{,}40 \times 5{,}80}{2} = 48{,}72$ qm. Dachfläche $=$ 208,80 qm.

11. Ein Weiher von rechteckigem Querschnitt ist 25 m lang, 18 m breit, 1,50 m tief und hat eine zweifache Böschungsanlage. Wie viel Quadratmeter beträgt der zu pflasternde Boden nebst den Seitenflächen? Boden $= 19 \times 12 = 228$ qm. Höhe der Seitenflächen $= \sqrt{1{,}5^2 + 3^2} = 3{,}35$ m. Sämtliche Seitenflächen $= 2 \times (22 + 15) \times 3{,}35 = 247{,}90$ qm. Zu pflasternde Fläche $= 475{,}90$ qm.

12. Wie viel Quadratmeter Holz erfordert ein Aschkasten mit Deckel von der Gestalt eines Pyramidenstumpfes, wenn die Grundflächen (Quadrate) 0,50 bezw. 0,30 m breit sind, und der Abstand derselben 0,75 m beträgt? Beide Grundflächen $= 0{,}25 + 0{,}09 = 0{,}34$ qm. Höhe der Seitenflächen $= \sqrt{0{,}75^2 + 0{,}1^2} = 0{,}756$ m. Die 4 Seitenflächen $= \frac{4 \times (0{,}5 + 0{,}3) \times 0{,}756}{2} =$ 1,2096 qm. Oberfläche $= 1{,}5496 =$ rund 1,55 qm.

Digitized by Google

13. Den Mantel eines Kegels zu finden (Fig. 244). Es sei der Durchmesser a b = 0,9 m und die Länge der Seite a c = 1,1 m, so ist der Umkreis = 0,9 × 3,14 = 2,826 m. Dieses mit der Länge der Seite a c multipliziert und durch 2 dividiert = $\frac{2{,}826 \times 1{,}1}{2}$ = 1,554 qm giebt den Kegelmantel. § 142.

14. Wie viel Quadratmeter faßt das Tuch eines kegelförmigen Zeltdaches von 6 m Durchmesser und 2,50 m Höhe? Seitenkante des Kegels = $\sqrt{3^2 + 2{,}5^2}$ = 3,90 m. Inhalt des Tuches = $\frac{6 \times 3{,}14 \times 3{,}90}{2}$ = 36,74 qm.

15. Den Mantel des Kegelstumpfes (Fig. 236) aus a b = 8 m, c d = 4 m und a c = 6 m zu berechnen. Der mittlere Durchmesser = $\frac{8+4}{2}$ = 6 m; Mantel = 6 × 3,14 × 6 = 113,04 qm.

16. Wie viel Quadratmeter enthält die kreisrunde Dachfläche a b d c (Fig. 245), wenn der obere Durchmesser c d = 10 m, der untere Durchmesser a b = 22 m und die Höhe der Seite a c = 7 m ist? Dachfläche = 351,68 qm.

17. Wie viel Quadratdecimeter Eisenblech enthält eine Schüssel, wenn der Bodendurchmesser 0,8 dm, die Seitenlängen 0,54 dm und die lichte Weite 1,2 dm beträgt? Fläche = $0{,}4^2 \times 3{,}14 + \frac{0{,}8 + 1{,}2}{2} \times 3{,}14 \times 0{,}54$ = 2,198 qdm.

18. Der Abschlußkopf eines Hochwasserdammes hat die Gestalt eines Kegelstumpfes von 4 m Höhe, 3 m Kronenbreite und zweifacher Böschungsanlage. Wie groß ist die abzupflasternde Oberfläche? Unterer Durchmesser = $\frac{3 + 2 \times 2 \times 4}{2}$ = 9,5 m. Kegelstumpfseite = $\sqrt{4^2 + 8^2}$ = 8,94 m. Halber Mantel = $\frac{8{,}94 \times 3{,}14\ (1{,}5 + 4{,}75)}{2}$ = 87,72 qm. Halber Deckkreis = $\frac{1{,}5^2 \times 3{,}14}{2}$ = 3,53 qm. Oberfläche = 87,72 + 3,53 = 91,25 qm.

19. Die Oberfläche einer Kugel aus dem Durchmesser = 3 m zu bestimmen. Oberfläche = 4 × 1,5 × 1,5 × 3,14 = 28,26 qm.

20. Wie viel Quadratmeter enthält die Dachfläche (Fig. 247), wenn der Durchmesser a b = 6 m ist? Dachfläche = 2 × 3 × 3 × 3,14 = 56,52 qm.

21. Ein Ponton besteht aus einem Halbcylinder und 2 Viertelkugeln. Wie viel Quadratmeter beträgt die Oberfläche, wenn das Boot 7 m lang und 1 m breit ist? Halbcylinder = 0,5 × 3,14 × 6 = 9,42 qm; Halbkugel = $2 \times 0{,}5^2 \times 3{,}14$ = 1,57 qm; Oberfläche = 9,42 + 1,57 = 10,99 qm.

22. Den Inhalt einer Kappe zu bestimmen, wenn der Kugeldurchmesser f g (Fig. 246) = 1,2 m und die Höhe h, = 0,3 m ist. Kappe = 1,2 × 3,14 × 0,3 = 1,13 qm.

23. Ein Raum ist durch eine Kappe von 0,75 m Höhe abgeschlossen, während der zugehörige Kugelradius 5 m beträgt. Wie teuer stellt sich der Anstrich, wenn pro Quadratmeter 1,80 ℳ gezahlt wird? Kosten = 10 × 3,14 × 0,75 × 1,80 = 42,39 ℳ

24. Den Inhalt eines Zonenmantels (Fig. 246) f d e g zu bestimmen, wenn die Höhe desselben 1 dm und der zugehörige Kugelradius 3 dm beträgt. Zonenmantel = 6 × 3,14 × 1 = 18,84 qdm.

Digitized by Google

25. Ein kupferner Kessel hat die Form eines Zonenmantels. Wie groß ist die Oberfläche desselben, wenn die Höhe 1,5 dm, der Durchmesser des Grundkreises 4 dm und der zugehörige Kugeldurchmesser 6 dm beträgt? Grundkreis $= 2^2 \times 3{,}14 = 12{,}56$ qdm; Zonenmantel $= 6 \times 3{,}14 \times 1{,}5 = 28{,}26$ qdm; Gesamtfläche $= 40{,}82$ qdm.

Von dem Ausziehen der Kubikwurzel.

§ 147. Wenn eine Zahl mit sich selbst multipliziert wird, so erhält man ihr Quadrat; z. B. $5 \times 5 = 25$; 25 ist also das Quadrat von 5.

Das Quadrat ist ein Produkt aus zwei gleichen Faktoren.

Multipliziert man das Quadrat $5 \times 5 = 25$ nochmals mit 5, so erhält man den Kubus: $5 \times 5 \times 5 = 125$; 125 ist mithin der Kubus von 5.

Der Kubus ist ein Produkt aus drei gleichen Faktoren; jeder der Faktoren ist die Kubikwurzel dieses Produkts; 125 ist das Produkt aus $5 \times 5 \times 5$, darum ist 5 die Kubikwurzel von 125.

Die Kubikwurzel ausziehen heißt diejenige Zahl suchen, welche, dreimal als Faktor gesetzt, die gegebene Zahl hervorbringt.

Die Kubusse der einziffrigen Zahlen sind folgende:

1.	8.	27.	64.	125.	216.	343.	512.	729.	1000.
1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.

Man sieht hieraus, daß eine Kubikzahl, welche nur aus 3 Ziffern besteht, nicht mehr als eine einziffrige Zahl zu ihrer Wurzel haben kann; weil 10, die kleinste zweiziffrige Zahl schon 1000 zum Kubus hat. Ebenso kann eine sechsziffrige Zahl nur eine zweiziffrige zu ihrer Kubikwurzel haben, weil der Kubus von 100 (1 000 000) schon sieben Ziffern enthält, u. s. w.

Übungen.

1. Die Kubikwurzel aus der Zahl 12977875 zu ziehen.*

$$\sqrt[3]{12'\,977'\,875} = 235$$

8	
4 9′ : 12	$(= 3 \times 2^2)$
12 167	
810 8 : 1587	$(= 3 \times 23^2)$
12 977 875	

* Eigentlich erfolgt die Berechnung der Kubikwurzel nach der Formel $(z + e)(z + e)(z + e) = (z + e)^3 = z^3 + 3z^2e + 3ze^2 + e^3$, worin z Zehner, e Einer bedeuten, in nachstehender Weise:

$\sqrt[3]{262'144} = 64$	z e
$z^3 = 216$	
461 : 108	$(= 3 \times 6^2 = 3z^2)$
$3z^2e = 432$	
294	
$3ze^2 = 288$	
64	
$e^3 = 64$	

$\sqrt[3]{195'112} = 58$	z e
$z^3 = 125$	
701 : 75	$(= 3 \times 5^2 = 3z^2)$
$3z^2e = 600$	
1011	
$3ze^2 = 960$	
512	
$e^3 = 512$	

Digitized by Google

Man teilt die ganze Zahl vom Komma aus nach rechts und links in Abteilungen von je drei Ziffern, wobei es öfter vorkommt, daß die erste Abteilung nur eine oder zwei Ziffern erhält, und sucht die Wurzel der ersten Abteilung, welche 2 ist. Den Kubus derselben, 8, zieht man von 12 ab, wodurch man die Zahl 4 als Rest erhält. Zu dem Rest fügt man die nächste Ziffer 9 und dividiert 49 durch das dreifache Quadrat der erhaltenen Wurzel, nämlich $3 \times 2 \times 2 = 12$, so erhält man den Quotienten 3. — 4 würde zu groß sein, da sich das Produkt $24 \times 24 \times 24$ von der Zahl 12977 nicht abziehen läßt. — Hierauf erhebt man die bis dahin gefundene Wurzel zum Kubus; nämlich $23 \times 23 \times 23 = 12167$, und zieht 12167 von der gegebenen Zahl 12977 ab. Zu dem Rest 810 fügt man die Ziffer 8 und dividiert abermals durch das dreifache Quadrat des Quotienten $= 3 \times 23 \times 23 = 1587$; erhebt man den ganzen bis dahin erhaltenen Quotienten wieder zum Kubus, nämlich $235 \times 235 \times 235 = 12977875$, und zieht diesen von der zuerst gegebenen Zahl ab, so bleibt kein Rest, woraus folgt, daß die gegebene Zahl eine vollkommene Kubikzahl ist.

Läßt sich aber die untere Zahl von der oberen nicht abziehen, so ist dies ein Beweis, daß der Quotient zu hoch war, daher muß er in solchen Fällen um 1 oder 2 niedriger angenommen werden.

2. Die Kubikwurzel aus folgenden Zahlen zu ziehen: 4096; 12167; 103823; 157464; 493,039; 658,503. Antwort: 16; 23; 47; 54; 7,9; 8,7.

3. Die Kubikwurzel aus 1,560896; 105154,048; 170,953875; 0,000729; 0,007880599 zu bestimmen. Antwort: 1,16; 47,2; 5,55; 0,09; 0,199.

4. Es soll ein würfelförmiges Gefäß angefertigt werden von 3,375 cbm Inhalt. Wie groß ist die Würfelkante? Würfelkante = 1,5 m.

5. Ein Sandsteinwürfel wiegt 3283,2 gr. Wie groß ist die Würfelkante, wenn das spezifische Gewicht des Sandsteins = 1,9 gesetzt wird? Kante = 12 cm.

6. Ein Litergefäß so herzurichten, daß die Höhe des Cylinders gleich dem Durchmesser der Grundfläche wird. Wie hoch ist derselbe? Höhe = 10,84 cm.

Ist das Resultat mehr als zweiziffrig, so faßt man, so bald die ersten beiden Ziffern bestimmt sind, d. h. sobald e^3 abgezogen worden ist, diese unter einem neuen z zusammen.

$$\begin{array}{r} \overset{z}{\overbrace{}}e \\ \sqrt[3]{33'076'161} = 321 \\ z^3 = 27 \\ \hline 60 : 27\ (3z^2) \\ 3z^2e = 54 \\ \hline 67 \\ 3ze^2 = 36 \\ \hline 316 \\ e^3 = 8 \\ \hline 3081 : 3072\ (3z^2) \\ 3z^2e = 3072 \\ \hline 96 \\ 3ze^2 = 96 \\ \hline 1 \\ e^3 = 1 \end{array}$$

Digitized by Google

7. Eine Hohlkugel soll 180 l fassen. Wie groß ist der Kugeldurchmesser? Durchmesser = 6,97 = rund 7 dm.

8. Wie groß ist der Radius einer Kugel aus Messing, die 498 gr wiegt, das spezifische Gewicht des Messing zu 8,6 angenommen. Radius = 2,4 cm.

9. Eine Messingkugel vom Gewichte 35,553 kg soll vergoldet werden. Wie teuer wird die Vergoldung, wenn für den Quadratmeter 64 ℳ gezahlt werden? (Spezifisches Gewicht 8,5.) Kosten = 8,04 ℳ

10. Wie groß ist die Höhe eines Kugelabschnittes von 226,08 cdm Inhalt, wenn der Kugelradius gleich der dreifachen Höhe ist? Höhe = 3 dm.

Digitized by Google

II. Zeichnen.

Von der Projektionslehre.

§ 148. Gegenstände auf einer Ebene so darstellen (projizieren), daß dieselben in allen ihren Teilen genau zu erkennen sind, ist die Aufgabe der Projektionslehre. Diese Wissenschaft ist deshalb für jeden Techniker unentbehrlich, und ihre Kenntnis Künstlern und Gewerbetreibenden unerläßlich.

§ 149. Bei der Abbildung eines Gegenstandes muß die gegenseitige Entfernung des Gegenstandes, der Bildfläche (Projektionsebene) und des Zeichners bekannt sein; denn nur hierdurch ist man imstande, den Gegenstand so wiederzugeben, wie ihn das Auge a des Zeichners (Fig. 251) in Wirklichkeit erblickt. Der Augenpunkt a heißt Projektionsmittelpunkt; die Geraden durch a, welche entsprechende Punkte des Gegenstandes und Bildes verbinden, Projektionsstrahlen.

§ 150. Bezüglich der Abbildung sind zwei Fälle möglich:

I. Der Augenpunkt ist in endlicher Ferne von der Bildfläche. Diese Darstellung heißt perspektivische Projektion (Fig. 251).

II. Der Augenpunkt wird in unendlicher Ferne angenommen. Die Projektionsstrahlen sind also unter sich parallel. Diese Darstellungsweise heißt Parallelprojektion (Fig. 250). Die parallel laufenden Projektionsstrahlen können wiederum 1) schief, 2) senkrecht zur Bildfläche stehen und unterscheidet man demgemäß 1) schiefwinklige 2) rechtwinklige (Orthogonal-) Projektion.

Wenngleich die Parallelprojektion Eindrücke hervorruft, die der Wirklichkeit nicht völlig entsprechen, weil das Auge sich ja nicht in unendlicher Ferne befinden kann, so bietet dieselbe jedoch für konstruktive Zwecke so erhebliche Vorteile, daß dieselbe und zwar vorwiegend die Orthogonalprojektion, fast ausschließlich Anwendung findet.

§ 151. Beim Zeichnen eines Gegenstandes kommt es hauptsächlich darauf an, denselben so darzustellen, daß man von seiner äußeren (Länge, Breite und Höhe) wie innern Einrichtung, eine genaue Ansicht erhält, und daß alle seine Teile leicht und bequem zu messen sind.

§ 152. Diese Bedingungen erfüllen ein Grund- und ein Aufriß des zu zeichnenden Gegenstandes, wozu unter Umständen noch ein Durchschnitt tritt. Man denkt sich nämlich zwei zu einander senkrechte Ebenen, eine wagerechte und eine lotrechte (Grundriß- und Aufrißebene) z. B. Fußboden und eine Seitenwand des Zimmers, die sich in einer wagerechten Geraden (Achse)

Digitized by Google

schneiden, stellt den zu zeichnenden Gegenstand (etwa eine Pyramide) auf die Grundrißebene und fällt von allen bemerkenswerten Punkten (Ecken) Senkrechte auf 1) die Grundrißebene, 2) die Aufrißebene, wodurch man den Grundriß bezw. Aufriß des Körpers erhält. Alsdann dreht man, um eine Zeichenfläche zu bekommen, die Aufrißebene solange um die Achse, bis sie über d. h. in die Verlängerung der Grundrißebene fällt. Grundriß und Aufriß sind alsdann durch die frühere Schnittgerade beider Ebenen, die Achse, getrennt.

Ist es außerdem wünschenswert, von einem Gegenstande, z. B. einem Gebäude, die innere Einrichtung sich zu vergegenwärtigen, so legt man durch denselben parallel zu den beiden Hauptrichtungen zwei zu einander senkrechte Schnittebenen und erhält so den Längen- bezw. Querschnitt.

§ 153. Die Lichtstrahlen denkt man sich parallel mit der Hauptdiagonale eines Würfels, dessen eine Grundkante der Achse parallel ist, von links hinten oben einfallend. Infolge dessen bildet der Grund- und Aufriß der Lichtstrahlen mit der Achse einen Winkel von 45°. Daraus folgt, daß die Lichtstrahlen die Körper so beleuchten, daß dieselben ihre Schatten nach rechts vorn unten werfen. Jedoch ist es im Gegensatze zu den vorliegenden Figuren nicht mehr üblich, demgemäß die Linien bald stärker bald schwächer, d. h. sogenannte Schattenlinien zu ziehen; es werden vielmehr sämtliche sichtbaren Linien gleichmäßig stark ausgezogen, die unsichtbaren Kanten punktiert, die Hilfslinien gestrichelt.

Übungen.

1. Die Projektionen eines Punktes A zu zeichnen (Fig. 255).

Man fällt vom Punkte A — A im Raum gedacht, daher in der Figur nicht sichtbar — die Senkrechten (Projizierenden) auf 1) die Grundriß- 2) die Aufrißebene.

Es ist alsdann der Schnitt- oder Fußpunkt der Projizierenden A a′ in der Grundrißebene a′ die Projektion oder das Bild des Punktes A in genannter Ebene und heißt kurz der Grundriß, während a, der Fußpunkt der Projizierenden A a in der Aufrißebene, kurz der Aufriß genannt wird.

Um die Projektionen einer Linie zu erhalten, muß man von jedem Punkte derselben die Senkrechten auf die Grund- und Aufrißebene fällen und deren Fußpunkte in den einzelnen Ebenen der Reihe nach mit einander verbinden. Bei einer Geraden genügen die Projektionen zweier Punkte, also bei einer Strecke die Projektionen ihrer Endpunkte.

2. Die Projektionen einer zur Grundrißebene parallelen, zur Aufrißebene senkrechten Strecke B B′ zu zeichnen (Fig. 255).

Man fällt von den Endpunkten B, B′ der Strecke B B′ — B B′ im Raum gedacht, daher in der Figur nicht sichtbar — die Senkrechten B b′, B′ b″, so ist b′ b″ die Projektion von B B′ im Grundriß und b′ b″ = B B′, da die Gegenseiten im Rechteck (§ 40) gleich sind. Alsdann fällt man von B, B′ die Senkrechten B b, B′ b auf die Aufrißebene, welche aufeinander fallen müssen, da B B′ zur Aufrißebene senkrecht steht. Die Projektionen von B und B′ liegen also beide in b d. h. b ist ein Doppel- oder sogenannter Deckpunkt.

Mithin ist der Grundriß b′ b″ der Strecke B B′ gleich der wahren Größe dieser Strecke, der Aufriß b ein Punkt.

3. Die Projektionen einer zur Grundrißebene senkrechten, zur Aufrißebene parallelen Strecke C C′ zu zeichnen (Fig. 255).

Der Grundriß ist ein Punkt c, der Aufriß c′ c″ ist gleich der wahren Größe der Strecke C C′.

Digitized by Google

4. Die Projektionen einer zur Achse parallelen Strecke A B zu zeichnen (Fig. 256).

Grundriß a' b' wie Aufriß a b sind gleich der wahren Größe der Strecke A B und parallel zur Achse.

5. Die Projektionen einer zur Grundrißebene parallelen, zur Aufrißebene schiefen Strecke A B zu zeichnen (Fig. 257).

Der Grundriß a' b' ist gleich der wahren Größe der Strecke A B, der Aufriß a b ist verkürzt und parallel zur Achse.

6. Die Projektionen einer zur Grundrißebene schiefen, zur Aufrißebene parallelen Strecke A B zu zeichnen (Fig. 258).

Der Grundriß a' b' ist verkürzt und parallel zur Achse, der Aufriß a b gleich der wahren Größe der Strecke A B.

7. Die Projektionen einer zur Achse schiefen Strecke A B zu zeichnen (Fig. 259).

Grundriß a' b' wie Aufriß a b der Strecke A B sind verkürzt und schief zur Achse.

8. Die Projektionen eines zur Grundßrißebene senkrechten, zur Aufrißebene parallelen Rechtecks A B C D zu zeichnen (Fig. 260).

Der Grundriß a' b' ist eine Strecke gleich der wahren Größe der Rechtecksgrundlinie und parallel zur Achse; der Aufriß a b c d eine Fläche von der wahren Größe des Rechtecks A B C D.

9. Die Projektionen eines zur Grundrißebene senkrechten, zur Aufrißebene schiefen Rechtecks A B C D zu zeichnen (Fig. 261).

Der Grundriß a' b' ist eine Strecke gleich der wahren Größe der Rechtecksgrundlinie; der Aufriß a b c d ist in der Breite verkürzt.

10. Die Projektionen eines zur Achse senkrechten Rechtecks A B C D zu zeichnen (Fig. 262).

Der Grundriß ist eine Strecke gleich der wahren Größe der Rechtecksgrundlinie; der Aufriß ist eine Strecke gleich der wahren Größe der Rechtecks höhe. Beide Projektionen sind senkrecht zur Achse.

11. Die Projektionen eines zur Grundrißebene schiefen, zur Aufrißebene senkrechten Rechtecks A B C D zu zeichnen (Fig. 263).

Der Grundriß ist ein Rechteck mit der wahren Größe der Rechtecksgrundlinie, aber verkürzter Höhe; der Aufriß ist eine Strecke gleich der wahren Rechtecks höhe.

Aus 1—11 folgt, daß Strecken, Linien oder Figuren immer in derjenigen Projektionsebene, zu welcher sie parallel sind, in wahrer Größe erscheinen.

12. Die Projektionen eines Quadrates A B C D, dessen eine Diagonale senkrecht zur Grundrißebene ist, zu zeichnen, wenn die Quadratfläche zur Aufrißebene 1) parallel, 2) schief, 3) senkrecht ist (Fig. 264).

Der Grundriß ist eine Strecke gleich der wahren Größe der andern Diagonale. Der Aufriß ist 1) gleich der wahren Größe des Quadrats, 2) eine in der andern Diagonale verkürzte Fläche, 3) eine Strecke gleich der wahren Größe der andern Diagonale.

Dreht man das Quadrat (Fig. 264) aus der Lage 1) um die zur Diagonale A D durch C parallele Gerade G K, deren Grundriß c' ist, so beschreiben die Punkte b', a' im Grundriß die Kreisbogen b' e' h' bezw. a' f' g', während die Punkte b, a im Aufriß sich gleichzeitig auf den zur Achse parallelen Geraden b e c bezw. a f g bewegen.

13. Die Projektionen einer zur Grundrißebene senkrechten, zur Aufrißebene parallelen Kreisfläche A B zu zeichnen (Fig. 265).

Digitized by Google

Der Grundriß a' b' ist eine Strecke gleich der wahren Größe des Kreisdurchmessers und parallel zur Achse; der Aufriß a b ein Kreis gleich der wahren Größe der Kreisfläche.

14. Die Projektionen einer zur Grundrißebene senkrechten, zur Aufrißebene schiefen Kreisfläche A B zu zeichnen (Fig. 266).

Der Grundriß a' b' ist eine Strecke gleich der wahren Größe des Kreisdurchmessers A B. Der Aufriß a b ist eine Ellipse, deren große Achse gleich der wahren Größe des Kreisdurchmessers ist.

Sämtliche zur Grundrißebene senkrechten Kreissehnen sind im Aufriß von wahrer Größe (Aufg. 3); sämtliche zu diesen Sehnen senkrechte verkürzt (Aufg. 5). Beschreibt man über a' b' in der Grundrißebene den Halbkreis, teilt a' b' in eine beliebige Anzahl ungleicher oder gleicher (4) Teile, bildet den Aufriß der Teilpunkte, so wird in unserm Falle $a c = c d = d e = e b$; trägt man ferner die zu a' b' senkrechten Halbsehnen c' f', d' g' u. s. w. = c f, d g u. s. w. senkrecht zu a b nach oben und unten ab und verbindet die Punkte a, f, g, h, b der Reihe nach, so ist die letztere Kurve die verlangte Ellipse.

15. Die Projektionen einer zur Grundrißebene parallelen, zur Aufrißebene senkrechten Kreisfläche A B zu zeichnen (Fig. 267).

Der Grundriß a' b' ist ein Kreis gleich der wahren Größe der Kreisfläche A B; der Aufriß eine Strecke gleich der wahren Größe des Kreisdurchmessers.

16. Die Projektionen einer zur Grundrißebene schiefen, zur Aufrißebene senkrechten Kreisfläche A B zu zeichnen (Fig. 268).

Der Grundriß ist eine Ellipse; der Aufriß eine Strecke gleich der wahren Größe des Kreisdurchmessers (Konstruktion wie bei Aufgabe 14).

17. Die Projektionen eines Würfels zu zeichnen, der auf der Grundrißebene steht, und dessen eine Grundkante parallel zur Achse ist (Fig. 269).

Der Grund- wie Aufriß sind Quadrate gleich der wahren Größe der Würfelseiten.

18. Die Projektionen eines Würfels zu zeichnen, dessen eine Seitenkante in der Grundrißebene liegt und zur Achse senkrecht steht (Fig. 270).

Der Grundriß zeigt die beiden Seitenflächen A B, B D mit der wahren Größe der Grundlinie b' b' und verkürzten Höhen a' b' bezw. b' d'; der Aufriß ist ein Quadrat gleich der wahren Größe einer Würfelseite.

19. Die Projektionen eines Würfels zu zeichnen, dessen eine Seitenkante in der Grundrißebene liegt und zur Achse schief steht (Fig. 271).

Zeichne den Grundriß in gleicher ($\cong$) Größe wie Fig. 270 aber in schiefer Lage zur Achse, ziehe durch jede Ecke des neuen Grundrisses die Projizierenden und aus jeder Ecke der Figur 270 die Parallele zur Achse. Die Schnittpunkte der den entsprechenden Ecken zugehörigen Geraden sind die Ecken des neuen Aufrisses.

Als sichtbar ist zu zeichnen: 1) der Umriß, 2) die dem Auge am nächsten liegende Ecke; für den Grundriß ist es die höchste Ecke, für den Aufriß die vorderste Ecke, was aus dem Aufriß bezw. dem Grundriß zu ersehen ist.

20. Die Projektionen eines Würfels zu zeichnen, der so auf der Grundrißebene steht, daß eine der Diagonalen der Grundfläche zur Achse parallel ist (Fig. 272).

Der Grundriß ist gleich der wahren Größe der Würfelgrundfläche; der Aufriß zeigt zwei Würfelseiten mit wahrer Höhe und gleichmäßig verkürzten Grundkanten.

Digitized by Google

21. Die Projektionen eines geraden Kreiscylinders zu zeichnen, der auf der Grundrißebene steht (Fig. 273).

Der Aufriß ist ein Rechteck gleich der wahren Größe des Achsenschnittes des Cylinders; der Grundriß ist ein Kreis gleich der wahren Größe des Cylinder-Grundkreises.

22. Die Projektionen eines geraden Kreiscylinders zu zeichnen, dessen Seitenkanten schief zur Achse, jedoch parallel zur Aufrißebene sind (Fig. 274).

Der Aufriß ist ein Rechteck gleich der wahren Größe des Achsenschnittes. Im Grundriß erscheint der Achsenschnitt mit verkürzter Höhe l' d' und wahrer Größe l' l' der Grundlinie, die Grundkreise als Ellipsen (Aufg. 16).

23. Die Projektionen eines rechtwinkligen Parallelepipedons zu zeichnen, das auf der Grundrißebene steht, und dessen Seitenflächen schief zur Achse sind (Fig. 275).

Der Grundriß ist gleich der wahren Größe der Grundfläche; der Aufriß zeigt zwei Seitenflachen mit der wahren Größe b' f der Höhe und verkürzten Grundkanten a f, f h.

24. Die Projektionen eines geraden Kreiskegels zu zeichnen, der auf der Grundrißebene steht (Fig. 276).

Der Aufriß ist gleich der wahren Größe des Achsenschnittes; der Grundriß gleich der wahren Große des Grundkreises.

25. Die Projektionen eines geraden Kreiskegels zu zeichnen, dessen Achse schief zur Grundrißebene, jedoch parallel zur Aufrißebene ist (Fig. 277).

Der Aufriß ist gleich der wahren Größe des Achsenschnittes. Im Grundriß erscheint der Achsenschnitt mit verkürzter Höhe und wahrer Größe der Grundlinie, der Grundkreis als Ellipse (Aufg. 16).

26. Die Projektionen einer geraden sechsseitigen Pyramide mit regelmäßiger Grundfläche zu zeichnen, die auf der Grundrißebene steht und deren eine Grundkante parallel zur Achse ist (Fig. 278).

Der Grundriß ist gleich der wahren Größe der Grundfläche. Der Aufriß zeigt drei Seitenflächen, deren eine (mittlere) mit der wahren Größe der Grundkante; die übrigen Grundkanten wie die zugehörigen Höhen verkürzt.

27. Die Projektionen derselben Pyramide (26) zu zeichnen, wenn eine Grundkante in der Grundrißebene liegt und die Grundfläche senkrecht zur Aufrißebene steht (Fig. 279).

Zeichne zunächst den Aufriß als kongruente Figur zu Fig. 278 nur in anderer Lage zur Achse. Ziehe aus jeder Ecke des Aufrisses die Projizierende und aus jeder Ecke des Grundrisses (Fig. 278) die Parallele zur Achse. Die Schnittpunkte entsprechender Geraden ergeben die Eckpunkte des Grundrisses.

28. Eine Laterne (Fig. 280), deren Grundfläche die Form eines Quadrats hat, zu zeichnen und die wirkliche Länge der Stäbe zu ermitteln.

Man zeichnet den Auf- und Grundriß nach den gegebenen Maßen. Im Grundriß, welcher hier nur zur Hälfte dargestellt ist, zeigt x p q d die obere Weite, r s t g die Weite des Bodens und u c v w die Weite des Schornsteins an; d g ist die Projektion des untern und d c die Projektion des obern Stabes.

Da d c und d g nicht parallel zur Bildfläche sind, so erscheinen die Stäbe h l und h k im Aufriß verkürzt; um die wahre Länge zu finden, trägt man c o von n nach m, d o von a nach b und g o von y nach f. Zieht man m b und b f, so ist m b die Länge des obern und b f die Länge des untern Stabes.

Die Schablone, nach welcher die Laterne zusammengesetzt werden kann,

Digitized by Google

wird auf folgende Art erhalten: Man zieht in beliebiger Höhe die Gerade z β, trägt β e von r' nach z', zieht die Gerade z' e', trägt z β von z' nach e' und zieht e' u'. Das Trapez e' z' u' r' ist die Schablone, nach welcher der untere Teil der Laterne zusammengesetzt werden kann. Die Schablone zur Zusammensetzung des obern Teils wird auf ähnliche Weise gefunden.

29. Die wirkliche Länge der Gradsparren eines sechsseitigen Daches (Fig. 281), so wie die Schmiege zu deren Abfasung zu finden.

Nachdem man Auf- und Grundriß (Fig. 281) gezeichnet, stellt man den Grundriß (Fig. 282) von derselben Größe, aber so dar, daß die Seite f' g' zur alten Lage f g (Fig. 281) senkrecht steht. Hierauf zieht man die Senkrechten o' b und k' e, verlängert die Wagerechten a q und c p bis b und e, und zieht die Strecke b e, welche die wirkliche Länge des Gradsparrens angiebt.

Errichtet man auf g' die Senkrechte g' n und zieht i h rechtwinklig zu b e, trägt ferner i h von l nach m, l g' von l nach n, und zieht m n und m g', so ist ∢ n m g gleich der Schmiege zur Abfasung der Sparren.

30. Die Länge und Abfasung der Gradsparren für ein Walmdach zu finden (Fig. 283).

In Fig. 283 ist a b d c der Grundriß vom Ende des Daches, a r b der Aufriß, r f die Höhe des Daches und a r die Länge des Walmsparrens. Man zieht im Grundriß c f, errichtet auf c f die Senkrechte f g, trägt die Höhe r f von f nach g und zieht c g, welche Strecke die Länge des Gradsparrens angiebt. Senkrecht zu c g zieht man l n und macht n o = n m. Ferner zieht man durch n i k senkrecht zu c f; zieht man o i und o k, so ist i o k der Winkel, nach welchem die Gradsparren abgefaset werden.

31. Durchschnitt und Grundriß eines kleinen Gebäudes, in welchem sich ein Kappengewölbe befindet, zu zeichnen (Fig. 284).

Der Grundriß B ist in der Richtung x y durchschnitten. Im Aufriß sind a das Widerlager der Thürwölbung, b c der Durchschnitt des Gewölbes, e f g der Bogen, mit welchem sich das Gewölbe an die Umfassungsmauer oder das Widerlager anschließt, d das Fenster, m die Thür, n und o die Plinten, h i der Balken, k und l die Sparren.

Im Grundriß sind t die Thür, p q r s der überwölbte Raum, u und v die Fenster.

32. Die Projektionen einer Hyperbel zu zeichnen (Fig. 285, 286).

Es sei b' i c' h (Fig. 285) der Grundriß, b a c der Aufriß des Kegels. Die Hyperbelebene stehe senkrecht auf der Projektionsachse, so ist ihr Grundriß h i wie Aufriß d e eine Gerade. Teilt man den Grundriß des Kegels (Fig. 285) in mehrere, hier in zwölf gleiche, Teile, fällt von den Teilpunkten 4, 5 die Senkrechten auf die Achse, zieht 5' a und 4' a, welche d e in den Punkten g und f schneiden, dreht den Grundriß (Fig. 286) um 90°, fällt von den Punkten i', 8', 7', 6', b'', 1', 2', 3', h' die Senkrechten auf die Achse, zieht m a', n a', m' a' und n' a', welche die aus Fig. 285 parallel zur Achse gezogenen Geraden in den Punkten f' g' d' schneiden und verbindet e', f', g', d', g', f', e' durch eine krumme Linie, so erhält man den Aufriß der Hyperbel in der Ansicht von vorn.

33. Die Projektionen einer Parabel zu zeichnen (Fig. 287, 288).

Es sei b a c (Fig. 287) der Aufriß, b' e' v c' der Grundriß des Kegels; die zur Kegelseite a b parallele Schnittebene (Parabel) sei senkrecht zur Aufrißebene, so ist der Aufriß derselben d e eine Gerade. Teilt man d e in mehrere, hier in fünf gleiche, Teile, und zieht durch die erhaltenen Teilpunkte d, f, g, h, i Parallele zur Achse, so sind f k, g l, h m u. s. w. die Projek-

Digitized by Google

tionen der Kegelschnittkreise im Aufriß. Zieht man im Grundriß b′ c′ parallel zur Achse und durch die Punkte d, k, l, m, n, c des Aufrisses Senkrechte zur Achse, durch welche man auf b′ c′ die entsprechenden Punkte d′, k′, l′, m′, n′, c′ erhält, und beschreibt um o mit o d′, o k′, o l′, o m′ und o n′ im Grundrisse die konzentrischen Kreise, so sind diese die Projektionen der Kegelschnittkreise im Grundriß. Zieht man durch die Punkte d, f, g, h, i, e Senkrechte zur Achse, welche die konzentrischen Kreise in den Punkten d′, f′, g′, h′, i′, e′ schneiden, so giebt die Verbindung dieser Punkte den Grundriß der Parabel. Dreht man den Grundriß (Fig. 287) um 90° (Fig. 288) und errichtet in den Punkten t′, s′, r′, q′, p′, d′ Senkrechte zur Achse, welche die zur Achse im Aufrisse gezogenen Parallelen in den Punkten t, s, r, p, q, d schneiden, so erhält man durch deren Verbindung die Projektion der Parabel im Aufriß, jedoch, da d e (Fig. 287) nicht senkrecht auf der Achse steht, verkürzt.

Um die wirkliche Größe der Parabel zu finden, trägt man in Fig. 289 auf d e die Strecken d f, f g, h i, i e (Fig. 287) der Reihe nach ab, zieht durch die erhaltenen Punkte Wagerechte und überträgt auf diese die Strecken p p, q q, r r, s s, t t der Fig. 288 der Reihe nach, so giebt die Verbindung der Punkte t, s, r, p, q und d die verlangte Parabel.

34. Den Brennpunkt einer Parabel zu finden (Fig. 290).

Man zieht in dem beliebigen Punkt e auf a b die Senkrechte d e, verbindet d mit a, errichtet auf d a die Senkrechte d c, teilt c e, den sogenannten Parameter, in vier gleiche Teile und trägt einen solchen Teil von a nach f, so ist f der Brennpunkt der Parabel.

Die Strahlen einer Flamme, welche sich in dem Brennpunkte einer Parabel befindet, werden parallel zur Achse zurückgeworfen; daher kann man die Parabel zu Lampenschirmen, namentlich zu solchen, welche sich in den Lokomotiv-Laternen und Leuchttürmen befinden, anwenden. Fallen die Lichtstrahlen parallel zur Parabelachse auf die Parabel, so vereinigen sich die Strahlen in dem Brennpunkte derselben, woraus sich die Wirkung der parabolischen Brennspiegel erklären läßt.

Die Hyperbel ist zur Verbreitung des Lichts vorteilhafter als die Parabel, weil die Strahlen nicht parallel zur Achse zurückgeworfen werden, sondern sich immer weiter ausbreiten; daher ist sie zu Lampenschirmen in den Straßenlaternen anwendbar. Man kann sich derselben auch noch zu Rückwänden von Kaminen in den Zimmern bedienen, weil dadurch die Wärmestrahlen des Feuers, welches sich in dem Brennpunkt befindet, über das ganze Zimmer verbreitet werden. Auch bei Verfertigung der Soufflleurkasten im Theater ist die Hyperbel anwendbar, weil durch dieselbe der Schall der Stimme allseitige Verbreitung findet.

Von dem Gebrauch des verjüngten Maßstabes.

§ 154. Da in den meisten Fällen die Gegenstände nicht in ihrer wirklichen Größe, sondern kleiner gezeichnet werden, die Zeichnungen dessen ungeachtet aber die richtigen Verhältnisse, Formen und Maße zeigen sollen, so muß auch der Maßstab, nach welchem dieselben anzufertigen sind, kleiner als der wirkliche gemacht werden; ein solcher Maßstab heißt verjüngter Maßstab. Soll für die Zeichnung das Metermaß benutzt werden, so ist die Einteilung des Maßstabes 10- oder 100-teilig. Beim Zeichnen der Säulenordnungen werden die Maßstäbe in Modul und Partes geteilt.

Digitized by Google

Übungen.

1. Einen verjüngten Maßstab für das Metermaß zu zeichnen (Fig. 293). Dieser Maßstab, Transversal-Maßstab genannt, ist allen anderen vorzuziehen, und bei Zeichnungen, die Genauigkeit erfordern, von großem Nutzen; denn mit demselben kann man die kleinsten Teile, z. B. Zehntel, Hundertstel, genau messen und selbst die Tausendtel mit dem Augenmaße schätzen.

Man teilt eine Strecke a f in drei gleiche Teile, errichtet in den Punkten a, c, e und f die Senkrechten a b, c d u. s. w., teilt darauf a c in zehn gleiche Teile, trägt diese Teile auf a b ab, zieht durch alle Teilpunkte der Strecke a b Parallele zu a f und zieht endlich die Transversallinien c 1, 1 2, 2 3 u. s. w.

Bedeutet die Strecke d 1 einen dm, so giebt b d zehn dm und m n einen cm. Läßt man aber d 1 zehn dm gelten, dann giebt m n einen dm, o p zwei dm u. s. w. Bedeutet d 1 zehn dm, und will man z. B. die Länge von 46 dm abgreifen, so sucht man auf a c die Zahl 4, fährt auf der Transversalen aufwärts bis zu der Parallelen, welche mit der Zahl 6 bezeichnet ist; wo die Geraden von 6 und 4 sich schneiden, befindet sich der Punkt s, der von w 46 dm entfernt ist. Will man aber 146 dm abmessen, so giebt diese Größe die Strecke x s, weil die Entfernung von w bis s 46, und die von c bis e 100 dm beträgt.

2. Es soll die Zeichnung eines Gebäudes von 18 m Länge auf einem Zeichenblatt von 36 cm Länge dargestellt werden; wie groß ist die Länge eines Meters auf dem verjüngten Maßstabe anzugeben?

18 m Gebäudelänge entsprechen 0,36 m Papierlänge; 1 m Gebäudelänge entspricht 0,02 m $= \frac{1}{50}$ m Papierlänge. Die Zeichnung ist also im Maßstab 1 : 50 anzulegen, d. h. 1 cm der Zeichenfläche bedeuten 50 cm $=$ 0,5 m der wirklichen Gebäudelänge oder je 2 cm der Zeichnung sind gleich 1 m der wahren Länge.

§ 155. Ist bei der Verjüngung des Maßstabes ein bestimmtes Verhältnis angegeben, soll z. B. die zu zeichnende Kopie bezüglich des Flächenraums zwei-, drei-, vier- u. s. w. mal größer oder kleiner als das Original selbst werden, so kann dies auf mathematischem Wege entweder durch Zeichnung oder durch Rechnung gefunden werden.

Ein unrichtiges Verhältnis würde man erhalten, wenn man bei einer Zeichnung, welche doppelt so groß als das Original werden soll, die Länge des Meters zweimal so lang nehmen würde als das Meter des Original-Maßstabes; denn hierdurch würde die Kopie nicht zweimal, sondern viermal größer werden als das Original. Eben so fehlerhaft würde es sein, wenn die Kopie halb so groß als das Original werden soll, die Hälfte vom Meter des Original-Maßstabes zu dem der Kopie zu nehmen, da sie hierdurch viermal kleiner werden würde.

Übungen.

3. Einen Maßstab anzufertigen, nach welchem eine Zeichnung zwei-, drei-, vier- u. s. w. mal größer, als das Original wird (Fig. 294).

Man errichtet auf a b die Senkrechte a c, trägt ein Meter oder ein Decimeter des Original-Maßstabes auf a b $=$ a d, so wie auf a c $=$ a c ab, so giebt c d als Maßstab zufolge des pythagoräischen Lehrsatzes eine Kopie, die zweimal so groß als das Original ist. Macht man a c $=$ c d, so giebt

Digitized by Google

c e als Maßstab eine Kopie, die drei mal so groß wird als das Original. Macht man a f = c e, so giebt c f als Maßstab eine Kopie, die vier mal größer wird als das Original u. s. w.

4. Einen verjüngten Maßstab anzufertigen, nach welchem eine Zeichnung $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ u. s. w. des Originals wird (Fig. 295).

Man schlägt über a b, gleich einem Meter des Original-Maßstabes, den Halbkreis, errichtet auf a b im Mittelpunkte c die Senkrechte c d und zieht b d, so giebt b d als Maßstab eine Kopie gleich $\frac{1}{2}$ des Originals, denn $\overline{b\,d}^2 = \frac{1}{2}\,\overline{a\,b}^2$ nach dem pythagoräischen Lehrsatze. Teilt man a b in e und f in drei gleiche Teile, errichtet auf a b in f die Senkrechte f g und zieht g b, so giebt g b als Maßstab eine Kopie gleich $\frac{1}{3}$ des Originals. Soll die Kopie den vierten Teil des Originals ausmachen, so teilt man a b in vier gleiche Teile, errichtet auf a b in h die Senkrechte h i und zieht i b, so giebt i b als Maßstab eine Kopie gleich $\frac{1}{4}$ des Originals u. s. w.

5. Einen Maßstab so anzufertigen, daß der Flächeninhalt der Kopie zu dem des Originals in einem bestimmten Verhältnis z. B. 2 : 5 steht (Fig. 296).

Man trägt auf a b ein Meter des Original-Maßstabes ab und beschreibt über a b den Halbkreis. Hierauf teilt man a b in fünf gleiche Teile, errichtet auf a b in 2 die Senkrechte 2 d und zieht a d, so ist nach § 68 $\overline{a\,d}^2 = \overline{a\,b} \times \overline{a\,2} = \overline{a\,b} \times \frac{2}{5}\,\overline{a\,b} = \frac{2}{5}\,\overline{a\,b}^2$, d. h. a d giebt als Maßstab eine Kopie gleich $\frac{2}{5}$ des Originals.

6. Einen Proportional-Maßstab zu verfertigen (Fig. 297).

Dieser Maßstab findet beim Konstruieren der Kamm- und Stirnräder Anwendung.

Man trägt auf a b 30 gleiche Teile von beliebiger Größe ab, und errichtet auf a b in 22 die Senkrechte c d. Soll z. B. ein Kammrad verfertigt werden, dessen Umkreis 30 Teile enthält, die $\frac{3}{5}$ cm von einander entfernt sind, so trägt man eine Strecke von $\frac{3}{5}$ cm siebenmal auf c d ab und zieht die Gerade a d e. Errichtet man auf a b bei 15 und 30 die Senkrechten f g und b e, so ist f g Halbmesser, b e Durchmesser eines Kreises, auf welchen sich 30 Teile in einer Entfernung von $\frac{3}{5}$ cm auftragen lassen. Der Halbmesser des Kreises (Fig. 298) ist gleich f g; der Durchmesser k h gleich b e.

§ 156. Soll eine Zeichnung zwar kopiert, aber kleiner oder größer als das Original selbst gemacht werden, so zeichnet man zur Kopie einen sich eignenden Maßstab, nimmt die Maße mit dem Zirkel auf der Vorzeichnung genau ab und mißt ihre Länge auf dem dazu gehörigen Maßstabe, entnimmt alsdann das hierdurch erhaltene Maß dem Maßstabe der Kopie und trägt die so gefundene Länge auf die abzumessende Linie auf. Soll z. B. auf dem Original eine Strecke a b gemessen und im verkleinerten Maßstabe kopiert werden, so trägt man diese Strecke auf dem Maßstabe des Originals auf, und bestimmt, wie viel Meter und Centimeter dieselbe auf diesem Maßstabe ausmacht; ist diese Strecke etwa $1\frac{3}{4}$ cm lang, so trägt man die Länge $1\frac{3}{4}$ cm von dem Maßstabe der Kopie auf der zu zeichnenden Strecke ab. Ebenso verfährt man, wenn ein in der Wirklichkeit vorhandener Gegenstand im verjüngten Maßstabe gezeichnet werden soll.

Unter jeder technischen Zwecken dienenden Zeichnung muß der Maßstab, nach welchem sie gefertigt worden ist, angegeben werden; denn ohne denselben würde die Zeichnung völlig wertlos sein.

Digitized by Google

Damit das Papier wie der Maßstab durch das öftere Messen nicht zu sehr zerstochen werden, kann man letzteren zunächst am äußersten Rande des Bogens und nach Vollendung der Zeichnung an einem hierzu sich eignenden Orte nochmals rein und sauber auftragen.

Übungen.

7. Ein gegebenes Gesims im bestimmten Verhältnis (a b : A B) zu vergrößern (Fig. 299).

Man errichtet auf a c in a die Senkrechte a b, schlägt um b mit A B den Kreis, der a c in c trifft, so ist b c = A B. Stellt man b c senkrecht, so erhält man hierdurch die Höhe des zu vergrößernden Gesimses. Auf b c errichtet man ferner in b die Senkrechte b d, zieht durch n, o, p, q, r die Senkrechten zu n m, welche b d in den Punkten h, i, k, l, m schneiden. Giebt man b d eine wagerechte Lage, so erhält man hierdurch die Ausladungen des zu vergrößernden Gesimses.

8. Ein gegebenes Gesims im bestimmten Verhältnis (b d : C D) zu verkleinern (Fig. 300, 301).

Man zieht a c, c d so wie die Diagonale c b und trägt die gegebene Höhe C D von b auf b d = b e ab. Hierauf zieht man durch e die Wagerechte e f, zeichnet über c d das gleichseitige Dreieck c d g und über a c das gleichseitige Dreieck a b c. Alsdann macht man f e = g s, so wie C D = h u und zieht s t und u v. Durch die Punkte i, k, o zieht man die Senkrechten und Wagerechten, welche c d und a c in den Punkten m, n und r, q, p schneiden. Ferner zieht man m g, n g, l g und r h, q h, p h, welche s t in w, x, y und u v in 1, 2, 3, 4 schneiden; erstere bestimmen die Ausladung des Profils und letztere die Höhe, nach welchem das zu verkleinernde Gesims in Fig. 300 gezeichnet werden kann. Denn es ist s' t' und t' z' in Fig. 300 gleich s t und u v in Fig. 301.

9. Ein Gesims nach einem Ende in richtigem Verhältnis zu verjüngen (Fig. 302).

Es ist a b c d e das Profil des zu verjüngenden Gesimses. Man errichtet auf e p in e die Senkrechte e f und zieht durch a, b, c die Parallelen zu e p. Hierauf trägt man die Höhe, in welcher das Gesims verkleinert werden soll, von s nach l, ferner f e von l nach p, und giebt l p dieselbe Einteilung wie f e. Alsdann zieht man a l, b m, c n, d o und l q senkrecht auf p l und macht l q = a f. Durch l s wird die Höhe und durch s q die Ausladung des zu verjüngenden Gesimses bestimmt.

Von den Netzen regelmäßiger Körper.

§ 157. Wenn man die Flächen, welche einen Körper einschließen, in einer Ebene so aneinanderhängend zeichnet, daß sie, ausgeschnitten und richtig zusammengebogen, den Körper bilden, so nennt man diese Zeichnung das Netz des Körpers. Diese Netze dienen dazu, Körper zusammenzusetzen, oder mit dünnen Flächen zu überziehen.

Häufig zeichnet man diese Körpernetze auf Blech, Holz oder Pappe, schneidet sie aus, reißt auf dem Netz die Linien, späteren Kanten, vermittelst eines spitzen Instruments so tief als nötig ein, biegt die Flächen um und lötet oder leimt die anstoßenden Seiten zusammen.

Digitized by Google

Übungen.

1. Das Netz eines Oktaeders zu zeichnen (Fig. 303).

Das Netz des Oktaeders besteht aus acht gleichseitigen Dreiecken. Man zeichnet das Dreieck a b c, zieht durch die Spitze c die Parallele zu a b und zeichnet neben dem Dreieck a b c noch sieben andere, wie die Figur zeigt.

2. Das Netz eines Rhomboeders zu zeichnen (Fig. 304).

Das Netz des Rhomboeders besteht aus sechs Rhomben. Man zeichnet den Rhombus a b c d, zieht durch c d e parallel a b und hängt an diesen Rhombus noch fünf andere von gleicher Größe, wie die Figur zeigt.

3. Das Netz eines entekten Tetraeders zu zeichnen (Fig. 305).

Dieses Netz besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken und vier regelmäßigen Sechsecken. Man zeichnet in einen Kreis ein gleichseitiges Sechseck a b c d e f, durch Verlängerung der Seiten b c, d e und f a erhält man die Dreiecke a b g, c d h und e f i. An die Seiten b c, d e und f a des Sechseckes fügt man noch drei andere von gleicher Größe, und an eins dieser Sechsecke ein gleichseitiges Dreieck k l m.

4. Das Netz eines Dodekaeders zu zeichnen (Fig. 306).

Das Netz eines Dodekaeders besteht aus zwölf regulären Fünfecken. Man zeichnet in einen Kreis ein gleichseitiges Fünfeck a b c d e, und an die Seiten desselben fünf andere von gleicher Größe. Die sechs Fünfecke werden doppelt gezeichnet, wie die Figur angiebt.

5. Das Netz des Ikosaeders zu zeichnen (Fig. 307).

Da dieses Netz aus zwanzig gleichseitigen Dreiecken besteht, so wird erst das Dreieck a b c gezeichnet, dann c d ∥ a b und b e ∥ c d gezogen, darauf die übrigen Dreiecke, wie die Figur zeigt, konstruiert.

6. Das Netz des archimedischen Körpers zu zeichnen (Fig. 308).

Das Netz dieses Körpers besteht aus achtzehn Quadraten und acht gleichseitigen Dreiecken. Man zeichnet die Quadrate aneinanderhängend und über je zwei Seiten von vier Quadraten die acht gleichseitigen Dreiecke, wie die Figur zeigt.

7. Das Netz eines entekten Würfels (Hexaeders) zu zeichnen (Fig. 309).

Dieses Netz besteht aus sechs regulären Achtecken und acht regulären Dreiecken. Man zeichnet in einen Kreis ein gleichseitiges Achteck a b c d e f g h, fügt an die Seiten desselben abwechselnd regelmäßige Dreiecke und Achtecke, legt an eines der fünf vorhandenen Achtecke noch ein sechstes und zeichnet über je zwei Seiten der beiden letzten Achtecke, wie die Figur zeigt, ein gleichseitiges Dreieck.

8. Das Netz eines Körpers, welcher von sechs Achtecken, acht Sechsecken und zwölf Quadraten begrenzt wird, zu zeichnen (Fig. 310).

Man zeichnet in einen Kreis ein gleichseitiges Achteck, fügt an die Seiten des Achtecks abwechselnd gleichseitige Sechsecke und Quadrate. Dann zeichnet man an die vier Sechsecke b, c, d und e vier Quadrate, und an die Quadrate f, g, h und i vier Achtecke, darauf an die neuentstandenen Quadrate vier Sechsecke, und an die Achtecke vier Quadrate, zuletzt an eins dieser Quadrate noch ein Achteck, wie die Figur zeigt.

Digitized by Google

Von den Netzen verschiedener Gegenstände.

§ 158. Wenn ein Körper nach dem Modell eines gegebenen verfertigt werden soll, so verschafft man sich zunächst eine Schablone (Lehre), an welche man das Körpernetz anlegt, um den Teilen desselben die gehörige Rundung und Biegung geben zu können. Alsdann verfertigt man sich nach den Seiten des Grundrisses einen Winkel, dessen man beim Verbinden der Netzteile bedarf. Denn läßt man beim Zusammensetzen eines z. B. aus zwölf oder sechszehn Teilen bestehenden Körpers die Größe der Kanten-Winkel außer Acht, so werden die letzten Teile nicht zusammen passen; daher ist die Anfertigung eines Winkelmaßes oder einer Schmiege nach den Seiten des Grundrisses höchst notwendig.

Übungen.

1. Die Größe der Bretter zu ermitteln, aus welchen ein vierseitiges Dach mit quadratischer Grundfläche zusammengesetzt werden kann (Fig. 311, 312).

In Fig. 311 ist a b c der Aufriß und d e b′ c′ der halbe Grundriß des Daches. Man zieht (Fig. 312) die Lotrechte a f gleich der Strecke a b (Fig. 311), die Wagerechte b c = 2 b′ f (Fig. 311) und verbindet a mit b und c.

Setzt man vier gleich große Bretter wie a b c in Fig. 312 mit den Seiten a b und a c zusammen, so erhält man ein pyramidenförmiges Dach, welches mit dem Aufriß in Fig. 311 gleiche Höhe und Breite haben wird.

2. Die Größe der Bretter zu ermitteln, aus welchen ein dreiseitiges Dach mit regelmäßiger Grundfläche zusammengesetzt werden kann (Fig. 313, 314).

In Fig. 313 ist a b c der Aufriß und f b′ c′ der Grundriß des Daches. Man trägt auf der Lotrechten a d (Fig. 314) a b (Fig. 313) ab, macht die Wagerechte f b (Fig. 314) gleich 2 g f (Fig. 313), und zieht f a und a b.

Die Schmiege, welche an den Brettern angeschnitten werden muß, wenn dieselben auf Gehrung zusammengesetzt werden sollen, wird dadurch erhalten, daß man in Fig. 313 d e senkrecht zu a c und d h senkrecht zu g c′ zieht. Macht man i k = d e und zieht h k, so ist i k h der Winkel oder die Schmiege, nach welcher die Gehrung an den Brettern vorgerissen werden kann.

3. Die Größe der Bretter zu bestimmen, aus welchen ein pyramidenförmiges, oben abgeplattetes Dach von quadratischer Grundfläche zusammengesetzt werden kann (Fig. 315, 316).

In Fig. 315 ist a b d c der Auf- und e h b′ d′ der Grundriß. Man macht in Fig. 316 die Lotrechte a d = a b (Fig. 315) und zieht die Wagerechten e f und b c = 2 f a′ und 2 e b (Fig. 315). Die Schmiege zu der Gehrung wird durch folgende Konstruktion erhalten: Man zieht im Grundriß o l durch den Punkt c′ senkrecht zu c′ d′, macht c′ l = i k und zieht l d′. Hierauf fällt man auf l d′ die Senkrechte c′ m, macht c′ n = c′ m und zieht o n. Durch den Winkel c′ o n erhält man die Schmiege, nach welcher die Bretter abgefaset werden.

4. In Fig. 317 ist a b c d ein pyramidenförmiges oben abgeplattetes Dach, welches ein gleichseitiges Sechseck zur Grundfläche hat. Es soll das Netz zu diesem Dache entworfen werden (Fig. 317, 318).

Man zieht in Fig. 318 die Lotrechte b c, zeichnet das halbe Sechseck e f g h i von derselben Größe wie e f g h i in Fig. 317, teilt die Seiten h g und g f in zwei gleiche Teile und zieht a k und a m. Hierauf macht man l k (Fig. 318)

Digitized by Google

gleich a b (Fig. 317), zieht durch k n o parallel h g, macht k n = k o = k l und zieht h n und g o. Das Trapez h g n o ist der sechste Teil des ganzen Netzes; die andern Teile werden auf dieselbe Art gefunden. Der Grundriß so wie das Netz ist hier nur zur Hälfte gezeichnet.

5. Die wirkliche Größe der Dachflächen des Walmdaches a b c d zu finden (Fig. 319).

In Fig. 319 ist a b c d der Auf- und g h i k der Grundriß des Daches. Da alle Seiten dieses Daches sich nach dem Mittelpunkte des Gebäudes zu unter gleichen Sparrenwinkeln neigen, so ist a c und b d die Sparrenlänge, m und n sind die Projektionen der Punkte a und b. Um die Größe der Dachflächen zu erhalten, verlängert man m n bis l, so wie a m und b n um m o bezw. n p, trägt a c auf m l von q nach l und auf m o von r nach o und zieht o p parallel i k. Verbindet man l mit g und i, sowie i mit o und p mit k, so ist das Dreieck l g i die Walmfläche der Giebel, und das Trapez i k o p die Walmfläche der Langseiten des Daches. Zeichnet man auch die beiden andern Walmflächen und klappt alle vier Seiten nach der Mitte zusammen, so werden die Punkte o und p genau über m und n in der Dachhöhe a f liegen. Trägt man g m von f nach t und zieht a t, so giebt a t die Länge des Gradsparrens.

6. Den Mantel eines blechernen Rauchfanges zu zeichnen (Fig. 320).

In Fig. 320 ist a b c der Aufriß des Rauchfanges in der Ansicht von vorn und g b' f h der Grundriß. Trägt man g b' von b nach d und zieht a d, so ist a b d die Seitenansicht des Rauchfanges. Will man die Fläche zeichnen, welche über dem Dreieck g f h liegt, so trägt man a c (Fig. 320) auf der Lotrechten in Fig. 321 von a' nach c' ab, zieht die Wagerechte c' f' = f h (Fig. 320). Zieht man a' f', so erhält man das Dreieck a' c' f', den einen Teil der Rauchfangfläche. Um die andere Fläche, welche über g b' h liegen würde, zu zeichnen, zieht man in Fig. 322 die Lotrechte a'' d'' = a d (Fig. 320) und d'' h'' = b' h, so erhält man das Dreieck a'' d'' h'', den andern Teil der Rauchfangfläche. Da die längsten Seiten der beiden Flächen mit einander verbunden werden, so muß a'' h'' = a' f' sein.

7. In Fig. 323 ist a b c d der Auf- und i k l m der halbe Grundriß eines oben abgeplatteten Daches, dessen Grundfläche ein Rechteck bildet. Es soll das Netz der Dachflächen entworfen werden (Fig. 323, 324).

Man zieht in Fig. 324 die Wagerechte b d und die Lotrechte o p, zeichnet das Rechteck e' f' g' h' ≅ e f g h in Fig. 323, trägt a b aus Fig. 323 von e' nach b, von h' nach d und von o nach p; zieht durch die Punkte b, p und d die Geraden b q, s t und d r, trägt i l von b nach q und von d nach r, so wie u l von p nach s und t und zieht q f', s f', g' t und g' r. Die andere Hälfte des Netzes wird auf dieselbe Art gezeichnet.

8. In Fig. 325 ist a b c d der Auf- und e f g h der Grundriß eines oben abgeplatteten Daches, dessen Dachflächen zwei verschiedene Ausladungen (Neigungswinkel) haben, und dessen Grundfläche ein Rechteck bildet. Es soll das Netz der Dachflächen entworfen werden (Fig. 325, 326).

Man zieht in Fig. 326 die Wagerechte s t und die Lotrechte o' s', zeichnet das Rechteck i' k' l' m' ≅ i k l m in Fig. 325, trägt a b aus Fig. 325 von i' nach s und von k' nach t und zieht zu s t die Senkrechten s u und t v. Hierauf trägt man e f aus Fig. 325 von s nach u und von t nach v und zieht u m' und l' v. Alsdann trägt man in Fig. 325 n p von q nach s und zieht r s, so ist ∢ r s q der Neigungswinkel der Langseite. r s trägt man

Digitized by Google

in Fig. 326 von r' nach s', zieht durch s' f' h' = f h in Fig. 325 und zieht f' m' und h' l'.

9. Die Netzteile einer Verdachung zu entwerfen, deren Grundfläche ein Trapez ist, und deren Dachflächen drei verschiedene Ausladungen (Neigungswinkel) haben (Fig. 327—330).

In Figur 327 ist a b c d der Aufriß und e h g f der halbe Grundriß der Verdachung; es gehören hierzu drei verschiedene Dachflächen.

1) Um die Fläche oder den Netzteil zu der Seite e f zu entwerfen, zieht man in Fig. 328 die Lotrechte a c = a c (Fig. 327) und durch die Punkte a und c die Wagerechten. Hierauf trägt man i l und e f (Fig. 327) in Fig. 328 von a nach l und l, so wie von c nach f und f, und zieht l f und l f.

2) Um die Fläche zu der Seite h g zu zeichnen, zieht man in Fig. 329 die Lotrechte b d = b d in Fig. 327, zieht durch b und d die Wagerechten m m und g g, trägt auf diesen k m und h g der Fig. 327 von b bezw. d nach beiden Seiten ab und zieht m g und m g.

3) Um die Fläche zu der Seite f g zu entwerfen, zeichnet man erst das Profil p q r s (Fig. 327), die Ausladung dieser Seite. Man zieht die Senkrechte p q, trägt aus dem Grundriß l n und m o, von q nach s und r und zieht p s und p r. p s zeigt die Ausladung über l n, und p r die Ausladung über m o. Hierauf zieht man in Fig. 330 l' m' = l m (Fig. 327), sowie l' n' und m' o' = p s bezw. p r (Fig. 327) und legt durch n', o' die Gerade f g. Ferner trägt man f n und o g (Fig 327) nach Fig. 330 von n' nach f und von o' nach g und zieht f l' und m' g.

Die Seiten f l in Fig. 328 müssen gleich l' f in Fig. 330 sein, ebenso die Seiten m g in Fig. 329 gleich m' g in Fig. 330.

10. Das Netz einer Verdachung zu entwerfen, welche ein ungleichseitiges Achteck zur Grundfläche hat (Fig. 331 332).

In Fig. 331 ist a b d c der Auf- und t c' e' g' d' w der halbe Grundriß der Verdachung; s' x' r' ist das Profil oder die Ausladung der Seiten c' e' und g' d'. Nachdem man den Grund- und Aufriß gezeichnet, zeichnet man in Fig. 332 das halbe Achteck u a f h b v ≅ u a' f' h' b' v in Fig. 331, zieht o c senkrecht t w, teilt die Seiten a f und h b in zwei gleiche Teile und zieht o r und o β. Hierauf trägt man a c (Fig. 331) von q nach c, von u nach t und von v nach w, zieht durch t und w die Senkrechten zu t w und durch c e g parallel t w. Dann trägt man e' p (Fig. 331) in Fig. 332 von t nach c, von c nach e und g, so wie von w nach d und zieht die Geraden c a, e f, g h und d b. Alsdann zieht man in Fig. 331 x' r', trägt auf s' r', der Senkrechten zu x' r', aus dem Grundriß s r von r' nach s' und zieht x' s'. Hierauf trägt man die Strecke x' s' nach Fig. 332 von s nach r, zieht y z parallel a f, trägt r e' (Fig. 331) nach Fig. 332 von r nach y und z und zieht a y und f z. Die andere Hälfte des Netzes wird auf dieselbe Weise gezeichnet.

11. Das Netz eines Postaments mit quadratischer Grundfläche zu entwerfen (Fig. 333—335).

Nachdem man den Grund- und Aufriß gezeichnet, zieht man in Fig. 335 die Lotrechte a l, trägt a b (Fig. 333) nach Fig. 335 von a nach b, so wie b c, c d, d e, e f u. s. w. (Fig. 333) nach Fig. 335 von b nach c, von c nach d, von e nach f u. s. w. und zieht durch die erhaltenen Punkte b, c, d, e u. s. w. die Wagerechten. Hierauf trägt man aus Fig. 333 a b, m d, n f u. s. w. nach Fig. 335 von b nach p, von d nach q, von f nach r u. s. w., und

Digitized by Google

verbindet die erhaltenen Punkte durch Gerade. Zeichnet man drei diesem Netzteil kongruente und setzt sie, nachdem sie abgebogen sind, zusammen, so wird hierdurch ein Postament gebildet, welches ebenso groß ist, wie das in Fig. 333.

12. Das Netz eines anderen Postaments von quadratischer Grundfläche zu entwerfen (Fig. 336—338).

Man zieht in Fig. 336 zu i s die Senkrechte k s, trägt auf k s die Höhen der einzelnen Glieder ab und zieht durch die Punkte k, l, r Parallele zu i s. Hierauf zeichnet man das Profil a b h i, teilt den Bogen b h in mehrere (gleiche) Teile*), zieht durch die Teilpunkte c, d, e, f, g Parallele zur Achse und trägt a b, b c, c d, u. s. w. auf der Lotrechten k s (Fig. 338) der Reihe nach ab. Durch die erhaltenen Punkte k, l, m, n u. s. w. zieht man Wagerechte und trägt auf diesen die Strecken a k, b l, c m. u. s. w. der Fig. 336 der Reihe nach beiderseits ab. Verbindet man die erhaltenen Punkte mit einander, so ergiebt sich hierdurch der eine Teil des Netzes, welcher als Modell für die andern Teile dient. Fig. 337 ist der halbe Grundriß des Postaments.

13. Das Netz eines sechsseitigen Fußgesimses zu entwerfen (Fig. 339—341).

Man zeichnet im Grundriß (Fig. 340) die Hälfte eines gleichseitigen Sechsecks, und zwar so, daß die halbe Seite m q senkrecht auf n v steht. Dann zieht man q o, β o und q' o. Im Aufriß (Fig. 339) trägt man auf der Lotrechten o v die Höhe der einzelnen Glieder ab, zeichnet das Profil a d e k l m n, teilt die Bogen a d und e k in mehrere (gleiche) Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallele zur Geraden n v. Hierauf zieht man durch alle Teilpunkte Senkrechte zu n v, die die Strecke m o im Grundriß in a, b, c u. s. w. schneiden, trägt die Teile a b, b c, c d, d e u. s. w. des Profils auf a n in Fig. 341 der Reihe nach ab und zieht durch die erhaltenen Punkte die Wagerechten. Auf diesen trägt man aus Fig. 340 die Strecken a z, b y, c x u. s. w. beiderseits ab und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander. Dieser Teil des Netzes dient als Modell für die andern fünf Teile. Beim Zusammensetzen der einzelnen Teile ist der Winkel genau zu beachten, welchen die Seiten m q und q β im Grundriß (Fig. 340) bilden. Man muß sich daher nach dem Winkel m q β eine Schmiege anfertigen und diese beim Zusammensetzen der Netzteile benutzen.

14. Die verschiedenen Netzteile eines Kastens zu entwerfen, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, und dessen Seitenflächen gleiche Ausladung zeigen (Fig. 342 bis 346).

Man zeichnet im Grundriß der Fig. 343 das Rechteck a b t v, welches die Hälfte der obern Platte darstellt, trägt die Ausladung des Profils von a nach f, von x nach s, von t nach v und zieht f g, g w und w v. Hierauf trägt man im Aufriß die Höhen der einzelnen Glieder ab, zieht durch die erhaltenen Punkte n, o, s, t, z Parallele zur Projektionsachse, zeichnet das Profil und teilt den Bogen b f in mehrere gleiche Teile. Alsdann trägt man o s in Fig. 343 nach Fig. 342 von g nach t' und zieht durch t' zu g t' die Senkrechte n' z'.

Um das Netz des Deckels zu zeichnen, macht man das Rechteck a' b' t' v' in Fig. 346 gleich a b t v, Fig. 343, zieht o g und g'' g', trägt auf diesen

*) Wenn man eine Kurvenlänge auf eine Gerade übertragen will, so muß man die krumme Linie in so viel Teile einteilen, daß jeder einzelne Teil nur wenig von einer geraden Strecke abweicht; trägt man dann auf einer Geraden die auf der krummen Linie befindlichen Teile ab, so erhält die gerade Strecke hierdurch annähernd dieselbe Länge wie die krumme.

Digitized by Google

die Weiten des Profils a b c d e f (Fig. 342) von a nach b, von b nach c, sowie von t' nach b', von b' nach c', u. s. w. der Reihe nach ab und zieht durch die erhaltenen Punkte die Lot- und Wagerechten. Auf den Lotrechten trägt man die Strecken a n, b o, c p u. s. w. (Fig. 342) beiderseits an, auf den Wagerechten die Strecken a n', b o', c p' der Figur 342 der Reihe nach ab, und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

Um die Bekleidung der Seitenteile zu erhalten, trägt man in Fig. 344 auf f m die Teile g h, h i, i k u. s. w. des Profils (Fig. 342) der Reihe nach ab, und zieht durch die erhaltenen Teilpunkte die Wagerechten. Auf diesen trägt man die Strecken g t, h u, i v, k w u. s. w. der Fig. 342 ab und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander. Bei dem Netzteil in Fig. 345, welcher ebenso hoch, aber nicht so breit ist, wie der in Fig. 344, werden die Strecken g t', h u', i v' u. s. w. aus Fig. 342 der Reihenfolge nach beiderseits abgetragen und die erhaltenen Punkte mit einander verbunden.

15. Das Netz eines Postaments zu zeichnen, welches ein gleichseitiges Dreieck zur Grundfläche hat (Fig. 347 bis 349).

Der Grundriß dieses Körpers wird so gezeichnet, daß die Gerade, welche die Spitze x mit dem Mittelpunkte b der Grundlinie verbindet, parallel der Projektionsachse liegt; denn, falls x o senkrecht a v wäre, würde die Ausladung des Profils beiderseits gleich sein, und nicht die Seiten sondern die Kanten des Körpers andeuten. Die scharfen Kanten oder Ecken von o bis x und von o bis h, haben bedeutend mehr Ausladung, als die Seiten von b bis o, daher müßte das Netz viel zu lang werden, wenn es nach der Ausladung der Geraden o x entnommen würde.

Nachdem man den Grund- und Aufriß gezeichnet, teilt man den Bogen b f in mehrere gleiche Teile, zieht durch die Teilpunkte Wagerechte, trägt a b, c d, e f u. s. w. auf der Lotrechten (Fig. 349) der Reihe nach ab und zieht durch die erhaltenen Punkte Wagerechte. Hierauf zieht man durch die Punkte b, c, d, e, f (Fig. 347) Lotrechte nach Fig. 348, trägt die Strecken b g, c k, d l u. s. w. von b nach g, von c nach k, von d nach l u. s. w. in Fig. 349 ab und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander. Die Bleilinien werden alsdann im Grundriß ausgerieben, durch die Teilpunkte der folgenden Glieder wieder Senkrechte gezogen, und im Übrigen auf die soeben beschriebene Weise verfahren, bis die Zeichnung vollendet ist.

16. Die Gradlinien sowie das Netz einer achteckigen Turmkuppel zu zeichnen (Fig. 350 bis 353).

Nachdem man den Grund- und Aufriß gezeichnet, teilt man den Bogen a h in mehrere gleiche Teile und zieht durch die erhaltenen Punkte Parallele zur Projektionsachse. Hierauf zieht man durch h, g, f, e u. s. w. die Projizierenden bis zu der Geraden h o', zieht g v, f w, e x u. s. w. parallel zu den Seiten h r, r s, s t. In sämtlichen Schnittpunkten der Geraden r o' und s o' errichtet man auf ihnen Senkrechte, welche die im Aufrisse gezogenen Wagerechten in den Punkten r, v, w, x, s, y u. s. w. schneiden. Die Verbindung dieser Punkte ergiebt die beiden Geraden im Aufrisse.

Um das Netz zu dieser Kuppel zu zeichnen, trägt man auf a h in Fig. 350 sämtliche Teile des Profils der Reihe nach ab und zieht durch die erhaltenen Punkte die Wagerechten. Trägt man auf diesen die Strecken q h, p g, o f u. s. w. der Fig. 352 der Reihe nach ab, und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander, so ergiebt sich ein Teil des Kuppelnetzes. Verfertigt man nach diesem Netzteil noch sieben andere, so erhält man durch Zusammensetzen dieser Teile eine achteckige Kuppel von derselben Form wie die

Digitized by Google

in Fig. 351. Dergleichen Netze dienen auch dazu, das Material zu berechnen, welches erfordert wird, wenn eine solche Kuppel mit Brettern verschalt oder mit Metall gedeckt werden soll.

17. Den Aufriß und das Netz einer zwölfteiligen Kugel zu zeichnen (Fig. 353 bis 355).

Man teilt den Halbkreis a e i (Fig. 353) in acht gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallele zur Projektionsachse. Hierauf zeichnet man in Fig. 354 die Hälfte eines gleichseitigen Zwölfecks, dessen Hauptdiagonale = dem Kugeldurchmesser ist, und zieht k o, l o, m o u. s. w., welche als die Projektionen der zum Grundriß senkrechten Schnittebenen zu betrachten sind. Alsdann zieht man durch e, f, g, h, die Projizierenden nach dem Grundriß bis zu der Geraden k o, und beschreibt um o mit k o, r o, s o, t o konzentrische Halbkreise, welches die Horizontol-Projektionen der im Aufrisse gezogenen Geraden sind. Zieht man durch die Schnittpunkte l, m, n, p die Senkrechten zur Achse bis e q (Fig. 353), so erhält man die Punkte l, m, n, p. Projiziert man die Schnittpunkte des zweiten Halbkreises auf f x, die des dritten auf g y, die des vierten auf h z, so erhält man durch die Verbindung der entsprechenden Schnittpunkte die Gradlinien der Kugel.

Um das Netz der Kugel zu zeichnen, trägt man auf a i (Fig. 355) die acht gleichen Teile des Halbkreises a e i der Reihe nach ab, zieht durch die erhaltenen Punkte Senkrechte zu a i und trägt auf diesen die Strecken e k, d r, c s, b t (Fig. 354) der Reihe nach beiderseits ab. Durch die Verbindung der erhaltenen Punkte gewinnt man einen Teil des Kugelnetzes, nach welchem die anderen abgezeichnet werden können.

18. Das Netz eines Lampenschirmes zu entwerfen, dessen Grundfläche ein Rechteck ist, und dessen Seitenflächen zwei verschiedene Ausladungen haben (Fig. 356 bis 359).

Nachdem man den Auf- und Grundriß gezeichnet, teilt man das Profil a c e (Fig. 356) in mehrere gleiche Teile, zieht durch die Teilpunkte die Parallelen und Senkrechten zur Projektionsachse und zwar die letzteren so lang, bis sie die Gehrungslinie k f im Grundrisse schneiden.

Um den Netzteil der Seite e k zu zeichnen, trägt man auf a e (Fig. 358) sämtliche Teile des Profils der Reihe nach ab, zieht durch die erhaltenen Punkte die Wagerechten, trägt auf diesen die Strecken e k, d i, c h, b g, a f (Fig. 357) beiderseits der Reihe nach ab, und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

Um den Netzteil der Seite k r zu zeichnen, zieht man im Grundrisse durch die Punkte i, h, g Wagerechte und trägt die Strecken l q, l p, l n, l m im Aufriß von l nach q, von t nach p, von u nach n und von v nach m der Reihe nach ab. Verbindet man die Punkte w, m, n, p, q mit einander, so erhält man das Seitenprofil. Die Teile w m, m n, n p, p q werden auf w q in Fig. 359 der Reihe nach abgetragen, durch die erhaltenen Punkte Wagerechte gezogen, auf diesen die Strecken k q, i p, h n u. s. w. der Fig. 357 abgetragen, und die Punkte k, i, h, g, f mit einander verbunden.

19. Das Netz einer Verdachung zu entwerfen, deren Grundfläche ein ungleichseitiges Achteck ist, und deren Seitenflächen zwei verschiedene Ausladungen haben (Fig. 360 bis 363).

Man teilt den Bogen a b c d e (Fig. 360) in mehrere gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Lot- und Wagerechte. Durch die Punkte i, h, g, f, in welchen die Lotrechten die Gerade k o (Fig. 361) schneiden, zieht man i u, h n, g m, f w parallel k s.

Da die acht Seiten dieses Körpers zwei verschiedene Ausladungen und

Digitized by Google

ungleiche Breiten haben, so gehören hierzu auch zwei verschiedene Netzteile. Um den Netzteil zu den Seiten e k oder s t zu zeichnen, trägt man auf a f (Fig. 363) die Teile f e, e d, d c, c b, b a (Fig. 360) der Reihe nach ab, zieht durch die erhaltenen Punkte Wagerechte, trägt auf diesen die Strecken e k, d i, c h, b g, a f (Fig. 361) der Reihe nach ab, und verbindet die hierdurch erhaltenen Punkte mit einander.

Um den Netzteil zu der Seite k s zu erhalten, trägt man die Strecken q o, p o, m o, l o der Fig. 361 in Fig. 360 von l nach q, von k nach p, von i nach o u. s. w. der Reihe nach ab und verbindet die erhaltenen Punkte m, n, o, p, q, r mit einander. Der so entstandene Bogen ist das Profil der Seite k s. Man trägt daher die Teile dieses Profils auf r m (Fig. 362) der Reihe nach ab, zieht durch die erhaltenen Punkte Wagerechte, trägt auf diesen die Strecken k q, i p, h n, g m, f l der Fig. 361 beiderseits ab, und verbindet die so erhaltenen Punkte mit einander.

Ähnlich verfährt man bei allen anderen Teilen des Profils.

20. Das Netz einer achteckigen Vase zu zeichnen, welche oben blattförmig ausgeschnitten ist (Fig. 364 bis 366).

Nachdem man das Profil gezeichnet, teilt man den Bogen a e in mehrere gleiche Teile, trägt die Höhe der ausgeschnittenen Blätter von a nach n und zieht durch alle Teilpunkte die Wagerechten; durch dieselben Punkte zieht man auch die Projizierenden bis f o im Grundriß. Die Wagerechten im Aufriß erscheinen als gleichseitige Achtecke im Grundriß, die Blätter als die Bogen v l r, r m s u. s. w. Will man das Blatt r m s im Aufrisse, so errichtet man in den Punkten r, z, m, y, s Senkrechte zur Projektionsachse, welche die im Aufrisse befindlichen Wagerechten in den Punkten r, z, m, y, s schneiden. Die Verbindung dieser Punkte ergiebt die Projektion des verlangten Blattteils. Wie das Netz und die Gradlinien gezeichnet werden, ist bereits in 14. beschrieben worden.

21. Fig. 367 stellt den Aufriß, Fig. 368 den Grundriß und Fig. 369 das Netz einer zwölfeckigen Vase dar. Das Verfahren beim Zeichnen des Aufrisses wie des Netzes ist aus dem Vorhergehenden bereits bekannt und aus den Figuren deutlich zu ersehen.

22. Die verschiedenen Netzteile einer Vase zu entwerfen, deren Grundfläche ein unregelmäßiges Achteck ist, und deren Seitenflächen zwei verschiedene Ausladungen haben (Fig. 370—377).

Nachdem man den Grundriß und das Profil in Fig. 370 gezeichnet, teilt man den Bogen g d a in mehrere gleiche Teile, zieht durch die Teilpunkte Parallele und Senkrechte zur Projektionsachse und zwar die letzteren so lang, daß sie B o im Grundriß schneiden. Durch die erhaltenen Schnittpunkte zieht man e n, f p, g q u. s. w. parallel zu B C, und durch die Punkte, in denen diese Geraden C o schneiden, Parallele zu C D.

Um den Netzteil zu der Seite A B zu zeichnen, trägt man die Teile des Profils a d g (Fig. 370) auf y a (Fig. 374) der Reihe nach ab, zieht durch die erhaltenen Punkte die Wagerechten, trägt auf diesen die Strecken a e, b f u. s. w. (Fig. 371) der Reihe nach beiderseits ab und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

Um den Netzteil zu der Seite B C zu zeichnen, zieht man im Grundriß E w senkrecht zu B C; da hier w E und A y fast von gleicher Länge sind, und daher beide Seitenteile eine gleiche Ausladung haben, so kann man der Strecke w a in Fig. 375 auch dieselbe Einteilung geben, wie y a in Fig. 374. Man verlängert daher die Wagerechten in Fig. 374 nach Fig. 375, trägt auf

Digitized by Google

diesen die Strecken e i, f k, g l u. s. w. der Fig. 371, von a nach e, von b nach f, von c nach g u. s. w. ab, ebenso trägt man die Strecken i n, k p, l q u. s. w. von a nach n, von b nach p, von c nach q u. s. w. der Reihe nach ab, und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander, wie die Figur 375 zeigt.

Im Grundriß hat die Seite C D bedeutend weniger Ausladung wie A B und B C, es muß daher erst das Profil zu dieser Seite gezeichnet werden, bevor man den Netzteil entwerfen kann. Man verlängert die in Fig. 370 gezogenen Wagerechten bis nach der Fig. 373, zieht hier o' m, trägt die Strecken o v, o u, o t u. s. w. (Fig. 371) nach Fig. 373 von h nach a, von g nach b, von f nach c u. s. w. und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

In Fig. 376 trägt man die Teile des so eben gezeichneten Profils auf der Lotrechten f a der Reihe nach ab, zieht durch die erhaltenen Punkte Wagerechte und trägt auf diesen die Strecken n v, p u, q t u. s. w. (Fig. 371) der Reihe nach beiderseits ab und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander. Auf dieselbe Art zeichnet man die übrigen Netze des Vasenkörpers.

Das Netz des Deckels. Man zeichnet das halbe Achteck z x a c d e in Fig. 377 ≙ z x a c d e in Fig. 371, zieht durch die Mitte desselben die Lotrechte b h und errichtet senkrecht zu x a und c d (Fig. 371) die Geraden x f und d k. Hierauf trägt man aus Fig. 370 w x von z nach y und von e nach m und zieht durch y und m zu y m die Senkrechten y w und m l. Dann trägt man y w (Fig. 371) in Fig. 377 von y nach w, sowie von m nach l und zieht die Geraden w x und d l. In Fig. 371 zieht man x f senkrecht zu x a und trägt f x nach Fig. 372 von x nach f. Ferner trägt man o b und o h (Fig. 371) nach Fig. 373 von o' nach b bzw. von o nach h und zieht b h. x' f in Fig. 372 bestimmt die Länge der Neigungsfläche zu der Seite B C, ebenso bestimmt b h in Fig. 373 die Länge der Neigungsfläche der Seite C D. Man trägt daher x' f (Fig. 372) nach Fig. 377 von x nach f und von d nach k und zieht durch f und k w g und n l' parallel zu x a bezw. c d. Hierauf trägt man w f (Fig. 371) nach Fig. 377 von f nach w' und von k nach l', sowie f g von f nach g und von k nach n und zieht w' x, g a, c n und d l'. b h (Fig. 373) trägt man nach Fig. 377 von b nach h, zieht g' n', trägt hierauf g h der Fig. 371 von h nach n' und g' ab und zieht g' a sowie c n'. Die andere Hälfte des Netzes wird auf ähnliche Weise gefunden.

23. Die Netzteile eines Körpers zu entwerfen, dessen Grundfläche ein ungleichseitiges Achteck ist, und dessen Seitenflächen gleiche Ausladungen haben. (Fig. 378—381.)

Man teilt das Profil in mehrere gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallele und Senkrechte zur Projektionsachse; durch die Punkte, in welchen diese Geraden d m schneiden, zieht man f t, h u, k v u. s. w. parallel zur Seite d s und durch die Punkte t, u, v, w Parallele zu s z. Zu diesem Körper gehören drei verschiedene Netzteile, welche gleiche Höhen aber verschiedene Breiten haben.

Um die Netzteile zu zeichnen, trägt man in Fig. 379, 380, 381 auf a b die Entfernungen a 1, 1 2, 2 3, 3 b des Profils der Reihe nach ab, zieht durch die erhaltenen Punkte Wagerechte, trägt auf diesen die halben Längen der im Grundrisse gezogenen Parallelen beiderseits ab und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

24. Die Netzteile einer Vase zu zeichnen, welche ein aus Kreisbogen zusammengesetztes Sechzehneck zur Grundfläche hat. (Fig. 382—391.)

Digitized by Google

Man teilt das Profil (Fig. 382) in mehrere gleiche Teile und zieht durch die erhaltenen Punkte Parallele und Senkrechte zur Projektionsachse. Durch die Schnittpunkte der letzteren mit der Geraden A O im Grundriß zieht man Parallele zur Seite A B, ebenso durch die Schnittpunkte dieser mit B o Parallele zu B C u. s. w. Alsdann errichtet man auf A B die Senkrechte p n, auf B C die Senkrechte p' β u. s. w.

Das Profil des Körpers hat fünf verschiedene Ausladungen. Fig. 382 zeigt das Profil zu der Seite A a, Fig. 384 das Profil zu der Seite A B, Fig. 385 das Profil zu der Seite B C, Fig. 386 das Profil zu der Seite C D und Fig. 387 das Profil zu der Seite D E.

Man zieht in Fig. 384 die Senkrechte n' n, trägt p n, q n, r n u. s. w. aus Fig. 383 von n' nach p, von 1 nach q, von 2 nach r u. s. w. und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander. Hierauf trägt man aus Fig. 383 p' β, q' β, r' β, s' β u. s. w. nach Fig. 385, sowie v' g', w' g', x' g' u. s. w. nach Fig. 386 und a" g", b" g", c" g" u. s. w. nach Fig. 387 auf den dort befindlichen Wagerechten der Reihe nach ab und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

Um den Netzteil zu der Seite A a zu zeichnen, trägt man die Teile des Profils (Fig. 382) in Fig. 388 auf a g der Reihe nach ab, trägt auf den Wagerechten von den erhaltenen Punkten aus a A, b h, c i u. s. w. Fig. 383 beiderseits ab und verbindet die Endpunkte mit einander.

Um den Netzteil zu der Seite A B zu zeichnen, trägt man die Teile des Profils (Fig. 384) auf p' n in Fig. 389 der Reihe nach ab, trägt auf den Wagerechten von den erhaltenen Punkten aus p A, q h, r i u. s. w. der Fig. 383 von p' nach A, von q' nach h, r' nach i u. s. w.; ebenso p B, q v, r w u. s. w. von p' nach B, von q' nach v, von r' nach w u. s. w. und verbindet die Endpunkte mit einander.

Um den Netzteil zu der Seite B C zu zeichnen, trägt man die Teile des Profils (Fig. 385) auf p' β' in Fig. 390 der Reihe nach ab, trägt auf den Wagerechten von den erhaltenen Punkten aus p' B, q' v, r' w, s' x, t' S, p' C, q' b' u. s. w. der Fig. 383 der Reihe nach ab und verbindet die Endpunkte mit einander.

Um den Netzteil zu der Seite C D zu zeichnen, trägt man die Teile des Profils (Fig. 386) auf v' g' (Fig. 391) der Reihe nach ab, trägt auf den Wagerechten von den erhaltenen Punkten aus v' C, w' b', x' c', y' d u. s. w. der Fig. 383 ab und verbindet die Endpunkte mit einander.

Um den Netzteil zu der Seite D E zu zeichnen, werden die Teile des Profils (Fig. 387) auf a" g" in Fig. 392 abgetragen, durch die erhaltenen Punkte Wagerechte gezogen, beiderseits die Strecken a" D, h" h', c" i' u. s. w. der Fig. 383 der Reihe nach abgetragen und die erhaltenen Punkte mit einander verbunden.

Die Netzteile zu dem oben befindlichen Viertelstab werden auf dieselbe Art ausgetragen und gezeichnet; die hierbei erforderliche Einteilung ist durch die punktierten Linien im Auf- und Grundriß zu ersehen.

Von den Körperdurchdringungen.

1. In Fig. 393 schneiden sich zwei Cylinder a b e d und e d f g rechtwinklig; es soll das Netz gezeichnet werden.

Man teilt den halben Umkreis des Cylinders in mehrere (8) gleiche Teile und zieht durch die entstandenen Punkte Parallele zur Projektionsachse nach

Digitized by Google

der Fig. 394. Hierauf trägt man in Fig. 394 auf a p den ganzen Umkreis des Cylinders, sechzehn Teile, auf und errichtet auf a p in den erhaltenen Punkten die Senkrechten. Verbindet man die Schnittpunkte q, r, s, t u. s. w. mit einander, so ergiebt sich das Netz.

2. Die beiden Cylinder in Fig. 395 schneiden sich stumpfwinklig; es soll das Netz hierzu gezeichnet werden.

Man teilt den halben Umkreis des Cylinders in mehrere (8) gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte a, e, f, g die Lotrechten. Hierauf trägt man in Fig. 396 auf b m die Teile des ganzen Umkreises ab und zieht durch die erhaltenen Teilpunkte die Senkrechten zu b m. Dann trägt man a c, m t, n u, o v u. s. w. aus Fig. 395 nach Fig. 396 von a nach c, von e nach t, von f nach u u. s. w. und verbindet die erhaltenen Punkte durch den Bogen d c d. Schneiden sich die beiden Cylinder unter spitzem Winkel, so ist das Verfahren ähnlich.

3. Ein weiter Cylinder durchdringt einen engen so, daß sich beide Achsen rechtwinklig schneiden. Das Netz ist zu zeichnen. (Fig. 397—399.)

Man zieht c d gleich dem Halbmesser des engen Cylinders parallel a b, beschreibt die Viertelkreise a d und c e, teilt c e in vier oder mehrere gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Parallele zu b e. Die Schnittkurve q i' d' der beiden Cylinder wird erhalten, wenn man den Halbkreis in A in acht gleiche Teile teilt, durch die Teilpunkte Lotrechte zieht und auf diese die Strecken i c, k n, l o, m p der Reihe nach abträgt.

Um das Netz des engen Cylinders zu zeichnen, trägt man in Fig. 398 auf d e den ganzen Umkreis des Cylinders, nämlich sechzehn gleiche Teile ab, errichtet in den erhaltenen Punkten auf d e die Senkrechten, überträgt auf diese aus Fig. 397 die Strecken i c, k n, l o, m p der Reihe nach und verbindet die Endpunkte mit einander.

Das Netz des weiten Cylinders wird erhalten, wenn man in Fig. 399 auf r s den ganzen Umkreis des Cylinders, auf den zu r s Senkrechten r t und s u aus Fig. 397 r a abträgt und t u zieht. Trägt man aus Fig. 397 r c von r nach v, zieht v w parallel r s, teilt v w in zwei gleiche Teile und zieht x z, trägt ferner aus Fig. 397 d m, m l, l k, k i auf v w von d aus auf beiden Seiten der Reihe nach ab, zieht durch die Punkte k, l, m die Senkrechten zu v w und trägt auf diesen d e, p h, o g, n f aus Fig. 397 der Reihe nach ab, so ergiebt die Verbindung der erhaltenen Punkte die Schnittkurve.

4. Ein weiter Cylinder durchdringt einen engen so in schiefer Richtung, daß sich ihre Achsen schneiden. Das Netz ist zu zeichnen. (Fig. 400—402.)

a b (Fig. 400) sei der Durchmesser des weiten, c d der Durchmesser des engen Cylinders und q q' die größte Achse des schiefen Schnitts. Man trägt den Halbmesser c w des engen Cylinders von a nach h, ferner q' a' von a nach e, teilt die Viertel-Ellipse e f g h in drei gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Senkrechte zu h a. Hierauf teilt man den Halbkreis A in sechs gleiche Teile, zieht durch die Teilpunkte Parallele zu c q und durch die Punkte l, m, n Parallele zu a q'. Verbindet man die Schnittpunkte r, t, v, x, z entsprechender Parallelen mit einander, so ergiebt sich die Schnittkurve der beiden Cylinder.

Um das Netz des engen Cylinders zu zeichnen, trägt man (Fig. 401) auf d a den ganzen Umkreis A, nämlich zwölf gleiche Teile ab, zieht durch alle Teilpunkte die Senkrechten zu d a, trägt auf diesen c q, s r, u t u. s. w.

Digitized by Google

aus Fig. 400 der Reihe nach ab und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

Um auf dem Netze des weiten Cylinders die Schnittkurve zu erhalten, zieht man durch den Punkt a in Fig. 402 v w und x y parallel zu r t bezw. r s, trägt a n, n m, m l aus Fig. 400 von a nach n, von n nach m und von m nach l, zieht durch die erhaltenen Punkte die Senkrechten zu x y, überträgt auf diese a e, k f, i g (Fig. 400) beiderseits der Reihe nach und verbindet die erhaltenen Punkte.

5. Ein weiter Cylinder durchdringt einen engen so in senkrechter Richtung, daß sich die Achsen nicht schneiden. Das Netz ist zu zeichnen. (Fig. 403 bis 405.)

Man setzt die beiden Grundflächen der Cylinder in der Lage, in welcher sich die Cylinder durchdringen, über einander; teilt den Halbkreis a c b (Fig. 403) in sechs gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte die Senkrechten zu a d.

Um das Netz des kleinen Cylinders zu zeichnen, trägt man (Fig. 405) auf b d den ganzen Umkreis des Cylinders ab, errichtet in den Teilpunkten zu b d die Senkrechten, überträgt auf diese aus Fig. 403 a g, q h, p i, o k u. s. w. der Reihe nach und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

In Fig. 404 ist a b c d das halbe Netz des größern Cylinders; sollen auf diesem Netz die beiden Schnittkurven gezeichnet werden, so zieht man v x parallel a b und d f parallel a c, trägt aus Fig. 403 e g, g h, h i u. s. w. von e nach g, von g nach h, von h nach i u. s. w. Durch die erhaltenen Punkte zieht man die Senkrechten zu v x und überträgt auf diese r q, s p, c o der Fig. 403 beiderseits; durch die Verbindung der erhaltenen Punkte ergeben sich die verlangten Schnittkurven.

6. In Fig. 406 wird die Kugel A von einem Cylinder dergestalt durchdrungen, daß die Achse des Cylinders nicht durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Es soll das Netz des Cylinders gezeichnet werden. (Fig. 406 und 407.)

Man teilt den Bogen b d (Fig. 406) in beliebig viele Teile und zieht durch die Teilpunkte d, f, e, b Parallele zu a c. Hierauf zieht man die Achse s h des Cylinders, beschreibt um g und f die Bogen n o und i p, sowie um l und k die Bogen e o und f p. Alsdann trägt man in Fig. 407 auf c c den ganzen Umkreis des Cylinders ab, errichtet in a, c und c Senkrechte, überträgt aus Fig. 406 a b, a n, a i, a r der Reihe nach auf a b (Fig. 407) und zieht durch die Punkte n, i, r Parallele zu c c. Dann teilt man die Bogen n o und i p (Fig. 406) in beliebig viele Teile, trägt letztere von n nach o und von i nach p und verbindet die Punkte d, p, o, b mit einander.

7. Ein Cylinder durchdringt einen Kegel so, daß sich ihre Achsen rechtwinklig schneiden. Das Netz des Kegels und des Cylinders ist zu entwerfen. (Fig. 412 bis 414.)

Nachdem man den Aufriß in Fig. 412 gezeichnet, teilt man den Halbkreis a c b des Cylinders in mehrere (6) gleiche Teile und legt durch die Teilpunkte parallel zum Grundriß Ebenen, welche im Aufriß als Gerade, im Grundriß als Kreise erscheinen. Man zieht daher durch die Punkte, in denen die Wagerechten A B schneiden, Senkrechte zu B C und beschreibt um den Mittelpunkt o' die konzentrischen Halbkreise. Ferner zieht man durch die Punkte c, d, e, b im Grundriß Wagerechte, welche die betreffenden Halbkreise in den Punkten n, o, p, q, r, s, t schneiden. Verbindet man n, o, p, q, r, s, t mit einander, so erhält man die Projektion der Schnittkurve beider Körper im Grundriß. Hierauf errichtet man in den Punkten n, o, p, q, r, s, t die Senkrechten zur Achse B C, welche im Aufriß die Wagerechten in den Punkten n, o,

Digitized by Google

p, q, r, s, t schneiden. Verbindet man diese Punkte mit einander, so erhält man hierdurch die Projektion der Schnittkurve beider Körper im Aufriß. Nach dieser Zeichnung kann man die Netze entwerfen.

Das Netz des Kegels. Man beschreibt (Fig. 414) um A mit A D — A B in Fig. 412 den Kreisbogen B D C, teilt den Kegeldurchmesser B C (Fig. 412) in 7 gleiche Teile trägt 11 solcher Teile in Fig. 414 von D nach B und von D nach C und verbindet A mit B und C, so erhält man das Netz des Kegelmantels. Um die Schnittkurve auf dem Netz zu zeichnen, beschreibt man mit A β, A z, A y u. s. w. (Fig. 412) um A in Fig. 414 die Bogen β, s s, r r, q q, p p, o o, teilt im Grundriß die Bogen o v, p w, q x, r y, s z in mehrere kleine Teile, trägt dieselben in Fig. 414 auf den mit gleichen Buchstaben bezeichneten Bogen der Reihe nach beiderseits ab und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

Das Netz des Cylinders. Man trägt in Fig. 413 auf b a die zwölf gleichen Teile, welche den Umfang des Cylinders bilden, ab, zieht durch die erhaltenen Punkte Wagerechte, auf welche man aus Fig. 412 die Strecken n a, o h, p i, q k u. s. w. der Reihe nach überträgt, und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

8. Das Netz eines Dachrinnen-Winkels zu zeichnen. (Fig. 410 und 411.)

In Fig. 410 ist a b c d e f g der Querschnitt und h m k g, h i k l der Grundriß der Dachrinne.

Man teilt den Querschnitt in beliebig viele Teile, zieht durch die Teilpunkte Wagerechte und durch die Schnittpunkte dieser mit der Gehrung h k Lotrechte.

Um das Netz zu zeichnen, trägt man in Fig. 411 auf m g die Teile des Querschnitts der Reihe nach ab und errichtet in den erhaltenen Punkten auf m g die Senkrechten. Auf diese überträgt man g k, f r, e q u. s. w. aus Fig. 410 der Reihe nach und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander. Die kleine Wulst bei n kann in vier gleiche Teile geteilt und beim Austragen der Teile ebenso verfahren werden.

Von den Netzen der Kegel, Pyramidenstumpfe u. dergl.

1. Das Netz eines schief stehenden Kegels zu zeichnen. (Fig. 415 und 416.)

Nachdem man den Kegel a b c (Fig. 415) gezeichnet, verlängert man a c, macht a k = a b, beschreibt über b k den Halbkreis b l k und teilt diesen in sechs gleiche Teile. Durch die Teilpunkte zieht man m r, n s, l o u. s. w. senkrecht zu b k und verbindet r, s, o u. s. w. mit a. Ferner zieht man durch die Punkte d, e, f, g, h die Geraden d t, e u, f v, g w, h x parallel zu b k. Um das Netz zu zeichnen, beschreibt man mit a b (Fig. 415) in Fig. 416 den Bogen b o k, trägt die Teile des kleinen Halbkreises von o nach b und k und verbindet die Teilpunkte mit a. Hierauf trägt man aus Fig. 415 a t, a u, a v u. s. w. in Fig. 416 von a nach d, von a nach e u. s. w. und verbindet die erhaltenen Punkte mit einander.

2. Die Form der Bretterverschalung oder der Zinkbedeckung eines kuppelförmigen Daches zu bestimmen, wenn die Verschalung ringförmig um die Kuppel läuft. (Fig. 417.)

In Fig. 417 ist a b c der Aufriß der Kuppel. Man trägt auf dem Viertelkreise a b die Breiten der Bretter ab und zieht durch die erhaltenen Punkte Parallele zu b c. Hierauf zieht man die Sehnen h g, g f, f e, e c und errichtet auf b c die Senkrechte r q durch a. Die verlängerten Sehnen schneiden q r

Digitized by Google

in den Punkten n, o, p, q; um diese Punkte beschreibt man die Bogen h v, g u, g t, f s u. s. w., durch welche die Formen der Bretter bestimmt werden.

3. Die Form der Bretterverschalung eines ringförmigen Gewölbes zu bestimmen. (Fig. 418.)

In Fig. 418 ist a f u s t das ringförmige Gewölbe. Man beschreibt um r den Halbkreis a c d f, trägt auf diesem die Breiten der Bretter ab, zieht durch die Punkte b, c, d, e die Senkrechten zu a f, beschreibt um o die koncentrischen Halbkreise und zieht die Verlängerungen der Sehnen a b, c d, d e, e f bis zum Schnitt mit n l, wodurch man die Mittelpunkte für die Bogen f g, e h, e k, d i u. s. w. erhält.

4. Das Netz eines cylindrischen Bogenrohrs zu zeichnen. (Fig. 408.)

Man teilt den Halbkreis a b c in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, verbindet die Teilpunkte mit dem Mittelpunkt o', beschreibt über f c als Durchmesser den Halbkreis, teilt diesen in sechs oder acht gleiche Teile und zieht durch die Teilpunkte Senkrechte zu f c. Mit o'f, o'g, o'h u. s. w. beschreibt man um o' die koncentrischen Halbkreise, teilt a m in zwei gleiche Teile und zieht t o'.

Um das Netz zu erhalten, trägt man in Fig. 409 auf f g den Umkreis des Cylinders, nämlich zwölf gleiche Teile ab, zieht durch die Teilpunkte Senkrechte zu f g und überträgt auf diese t m, u n, o v u. s. w. (Fig. 408) beiderseits der Reihe nach. Durch die Verbindung der erhaltenen Punkte ergiebt sich der eine Teil des Netzes, nach welchem die anderen sieben Teile gezeichnet werden können.

5. Das Netz eines Pyramidenstumpfes mit quadratischer Grundfläche zu entwerfen. (Fig 419 bis 421.)

Fig. 420 ist der Auf-, Fig. 419 der Grundriß des Pyramidenstumpfes. Man trägt c a und a k (Fig. 419) nach Fig. 420 von g nach d und von h nach e und verbindet d mit e. Hierauf zieht man in Fig. 421 d f, beschreibt um f mit f d und f e (Fig. 420) die beiden Kreisbogen, trägt auf dem großen Bogen c b der Fig. 419 viermal ab, zieht durch die erhaltenen Punkte die Geraden h f, g f, i f, k f und verbindet die Schnittpunkte derselben mit dem innern Kreise durch Gerade.

6. Das Netz eines achtseitigen Pyramidenstumpfes zu entwerfen. (Fig. 422 bis 424.)

Nachdem man den Auf- und Grundriß gezeichnet, trägt man a b und a d aus Fig. 423 nach Fig. 422 von f nach h und von g nach i und verbindet h mit i. Mit k h und k i beschreibt man in Fig. 424 die beiden Kreisbogen, trägt auf dem größeren b c (Fig. 423) achtmal ab und verbindet die erhaltenen Punkte mit dem Mittelpunkt k. Die Schnittpunkte dieser Geraden mit dem innern Kreise verbindet man unter sich und erhält so das Netz der Pyramide.

7. Das Netz eines Pyramidenstumpfes, dessen Grundfläche ein Rhombus ist, zu zeichnen. (Fig. 425 bis 427.)

Fig. 425 ist der Auf-, Fig. 426 der Grundriß dieses Körpers. Man trägt a c und a e (Fig. 426) nach Fig. 425 von f nach g und von f nach h, sowie a b und a d von i nach l und von i nach k und zieht durch h und k, sowie durch g und l die Geraden h m und g m. Mit m h, m g, m k, m l beschreibt man (Fig. 427) Kreisbogen, trägt hier e c (Fig. 426) von g nach n und r, sowie von n nach o und von r nach q und zieht o m, n m, g m, r m und q m. Zieht man u t, t l, l s u. s. w., so erhält man das Netz zu den Seitenflächen des Körpers.

Digitized by Google

8. Das Netz eines vierseitigen Trichters mit einer senkrecht stehenden Seitenfläche zu entwerfen. (Fig. 428 bis 430.)

Im Grundriß (Fig. 429) zeigt a b c d die obere und e f g h die untere Öffnung des Trichters an. Im Aufriß ist i k die gegebene Höhe des Trichters. Man trägt o b und o a aus Fig. 429 nach Fig. 428 von i nach m und von i nach l, sowie o f und o e von k nach n und von k nach o und zieht durch l und o, sowie durch m und n die Geraden l p und m p. Mit p m, p l, p n, p o beschreibt man in Fig. 430 die Kreisbogen, trägt hier d c aus Fig. 429 von m nach c und g, sowie von c nach d und von d nach a, zieht durch die Eckpunkte Gerade nach dem Mittelpunkt p und verbindet die erhaltenen Schnittpunkte mit den entsprechenden kleinen Kreisbogen durch Gerade.

9. Das Netz eines Trichters (Kugelstumpfs) zu entwerfen. (Fig. 431 und 432.)

Nachdem man den Aufriß gezeichnet, beschreibt man mit den Strecken d b und d c (Fig. 431) um den Punkt f (Fig. 432) die beiden Kreisbogen h g i und k l m. Hierauf teilt man den Durchmesser a b des Grundkreises in sieben gleiche Teile, trägt elf solcher Teile in Fig. 432 von g nach h und i und zieht h f und i f.

10. Das Netz einer von Korbbogen begrenzten Zarge zu zeichnen. (Fig. 433 bis 436.)

Nachdem man den Auf- und Grundriß gezeichnet hat, trägt man in Fig. 435 auf o p die Strecke a b (Fig. 433) von o nach q und zieht senkrecht zu o p die Geraden x o und v q. Hierauf trägt man die Strecken h m, f k (Fig. 434) in Fig. 435 von q nach r und v und errichtet auf r v in r und v die Senkrechten r s und v w. Dann trägt man c d (Fig. 433) von s nach t und von w nach x und zieht durch die Punkte t, r und x, v die Geraden t u und x p, so sind t u, bezw. x p die Seiten der Kegelmantel, welche die Zarge bilden.

Um das Netz zu erhalten, teilt man zunächst die Bogen i k und m k (Fig. 434) in beliebig viele gleiche Teile, beschreibt mit der Strecke p v (Fig. 435) um den Punkt a (Fig. 436) den Bogen b c, auf welchem man die Teile des Bogens i k (Fig. 434) von c nach b abträgt, und zieht durch b und c die Geraden h a und g a. Hierauf trägt man die Strecke u r (Fig. 435) in Fig. 436 von b nach d und von c nach k und beschreibt mit den Radien b d und c k um die Punkte d und k die Bogen b e und c f, trägt auf dem Bogen b e die Teile des Bogens m k (Fig. 434) von b nach e, sowie die Hälfte dieser Teile auf dem Bogen c f von c nach f und zieht durch die Punkte e und f die Geraden l e m und i f k; ferner beschreibt man mit p x (Fig. 435) um a (Fig. 436) den Bogen g h und mit u t (Fig. 435) um d und k die Bogen h l und g i. Nach derselben Methode verfährt man weiter, bis das Netz vollendet ist.

11. Das Netz einer von Korbbogen begrenzten Zarge zu zeichnen. (Fig. 437 bis 440.)

Nachdem man den Auf- und Grundriß gezeichnet hat, trägt man in Fig. 439 auf h t die Strecke u w (Fig. 437) von h nach i und zieht zu h t die Senkrechten h q und i m. Hierauf trägt man die Strecken a b, d c und f e (Fig. 438) in Fig. 439 von i nach m, von i nach l und von i nach k, errichtet auf i m in k die Senkrechte k n, macht n o = u v in Fig. 437 und zieht durch die Punkte o und k die Gerade o r und durch die Punkte l und m, p s und q t parallel o r, so sind t q, s p, r o die Seiten der Kegelmantel, welche die Zarge bilden.

Digitized by Google

Um das Netz zu zeichnen, teilt man die Bogen b c, c e und e g (Fig. 438) in beliebig viele gleiche Teile beschreibt mit t m (Fig. 439) um den Punkt a (Fig. 440) den Bogen c b, auf welchem man die Teile des Bogens b c (Fig. 438) von c nach b abträgt, und zieht durch die Punkte b und c die Geraden x a und w a. Hierauf macht man c e = bd (Fig. 440) = s l (Fig. 439) und beschreibt um die Punkte e und d die Bogen c f und b k. Dann trägt man die Teile des Bogens c e (Fig. 438) von c nach f und von b nach k und zieht durch die Punkte f und k die Geraden v e und y d, macht f g=k i in Fig. 440 = r k (Fig. 439) und beschreibt um g und i die Bogen f h und k l; auf dem Bogen k l trägt man die Teile des Bogens e g (Fig. 438) von k nach l, sowie auf dem Bogen f h die Hälfte dieser Teile von f nach h, durch die Punkte h und l zieht man die Geraden u g und z i; alsdann beschreibt man mit den Strecken t q, s p und r o (Fig. 439) um die Punkte a, e, d, g und i (Fig. 440) die Bogen w x, w v, x y, v u und y z. Ähnlich verfährt man, bis das Netz vollendet ist.

12. Das Netz einer von Eilinien begrenzten Zarge zu zeichnen. (Fig. 441 bis 443.)

Man trägt auf g l (Fig. 442) die Höhe der Zarge von g nach h und zieht durch die Punkte g und h zu g l die Senkrechten r g und s h. Hierauf trägt man die Strecken d f, a b und b f aus Fig. 441 nach Fig. 442 von h nach m, von h nach p und von h nach s, und errichtet auf s h in m die Senkrechte m n. Dann trägt man die Ausladung der Zarge von n nach o und zieht durch die Punkte o und m die Gerade o i, sowie durch die Punkte p und s die Geraden q k und r l parallel o i. Hierauf teilt man die Bogen e f, f c und c b (Fig. 441) in beliebig viele Teile und verfährt beim Zeichnen des Netzes wie bei Aufgabe 9.

13. Das Netz einer rosettenartig begrenzten Zarge zu zeichnen. (Fig. 444 bis 446.)

Man beschreibt in Fig. 444 um den Mittelpunkt o die beiden punktierten Kreise, teilt den inneren in sechs gleiche Teile und beschreibt um die Punkte a, b, c, d, e, f u. s. w. die kleinen Kreisbogen, so erhält man als Grundriß der Zarge die Rosette (Fig. 444). Da jeder von den sechs Teilen der Zarge einen Teil eines Kegelstumpfes bildet, so zieht man im Aufriß (Fig. 445) die Wagerechten g' h' und i' k' und errichtet im Grundriß auf o k in i, g, h und k die Senkrechten, durch welche man im Aufriß die Punkte i', g', h', k' erhält; zieht man durch die Punkte i', g' und k', h', die Geraden i' l' und k' l', so ist l' die Spitze des Kegels. Die Projektion der Spitze im Grundriß ist der Fußpunkt l der Senkrechten l' l. Hierauf teilt man den Bogen p k x in sechs gleiche Teile, zieht m l, n l, p l und q l, trägt die Strecken l m, l n, l p und l q in dem Aufriß von r nach v, von r nach u, von r nach t und von r nach s und zieht s l', t l', u l' und v l'. Um einen Teil des Netzes zu zeichnen, beschreibt man mit den Strecken s l', t l', u l', v l' und k l' um den Punkt g in Fig. 446 Kreisbogen, auf welchen die drei Teile k m, m n und n p der Fig. 444 von e nach a und b abgetragen werden. Ferner beschreibt man mit den Strecken h' l', z l', y l', x l' und w l' der Fig. 445 um den Punkt g in Fig. 446 Kreisbogen, überträgt auf diese die vier Teile h r, r s, s t und t u der Fig. 444 von f nach c und d der Reihe nach, verbindet die erhaltenen Punkte durch krumme Linien und zieht a c und b d.

14. Das Netz einer an den Ecken abgerundeten Zarge zu zeichnen. (Fig. 447 bis 450.)

Digitized by Google

Nachdem man den Auf- und Grundriß gezeichnet, trägt man in Fig. 449 auf i h die Strecke a b (Fig. 447) von i nach l ab und zieht i k und l m senkrecht c h durch die Punkte i und l. Hierauf trägt man die Strecke d f (Fig. 448) von l nach m und errichtet in dem Punkte m auf l m die Senkrechte m n, dann trägt man die Strecke a c (Fig. 447) von n nach k und zieht durch die Punkte m und k die Gerade k h.

Um das Netz zu zeichnen, macht man (Fig. 450) q r = g e (Fig. 448) und zieht zu q r die Senkrechten q o und r p. Hierauf trägt man die Strecke h k (Fig. 449) in Fig. 450 von q nach o und von r nach p und beschreibt um die Punkte o und p die Bogen q u und r w; alsdann mit der Strecke h m (Fig. 449) um die Punkte o und p die Bogen s v und t x. Auf diesen Bogen trägt man die Teile des Bogens e f (Fig. 448) von s nach v und von t nach x und zieht durch die erhaltenen Punkte v und x die Geraden u o und w p.

15. Das Netz einer länglichen, an den Ecken abgerundeten Zarge zu zeichnen. (Fig. 451 bis 454.)

Die Fig. 451 ist der Aufriß, Fig. 452 die Bodenfläche, Fig. 453 die Vorbereitungsfigur und Fig. 454 das Netz. Das Verfahren ist dasselbe wie bei Aufgabe 14.

16. Das Netz einer länglichen, an den Ecken verschiedenenartig abgerundeten Zarge zu zeichnen. (Fig. 455 bis 457.)

Nachdem man den Grundriß (Fig. 455) gezeichnet, trägt man in Fig. 456 auf a b die Höhe der Zarge von a nach c, und zieht durch die Punkte a und c die zu a b Senkrechten a d und c e. Hierauf trägt man die Strecken a l, a e und a d (Fig. 455) nach Fig. 456 von c nach g, von c nach f und von c nach e, sowie die Strecken a k, a f, a g (Fig. 455) nach Fig. 456 von a nach l, von a nach k und von a nach d und zieht die Geraden d b, k b und l b. Ferner trägt man die Strecken b d und c g (Fig. 455) nach Fig. 456 von a nach m und von a nach n und zieht m p und n o parallel k f.

Um das Netz zu zeichnen, zieht man in Fig. 457 a b, beschreibt mit b d, b k und b l (Fig. 456) um den Punkt a (Fig. 457) die Bogen c d, e f und g h, ebenso mit den Strecken b e, b f und b g (Fig. 456) um a die Bogen i k, l m und u o. Hierauf trägt man g m aus Fig. 455 auf dem Bogen c d in Fig. 457 ab und zieht c d, c a und d a; durch die Punkte c, d, i und k zieht man die zu c d bezw. i k Senkrechten c p, i r, d q und k s. Dann trägt man die Strecke p m (Fig. 456) in Fig. 457 von c nach p und von d nach q und beschreibt um die Punkte p und q die Bogen c t und d x. Ferner trägt man die Strecke o n (Fig. 456) in Fig. 457 von i nach r und von k nach s, beschreibt um die Punkte r und s die Bogen i l und k m, auf welche man die Teile des Bogens d e (Fig. 455) abträgt, und zieht durch die Punkte l und m die Geraden t a und x a. Endlich trägt man die Strecke f k (Fig. 455) in Fig. 457 von t nach v und von x nach w und zieht t v, v a, u l, x w, w a und o m.

17. Das Netz einer karniesartig geformten Zarge zu zeichnen (Fig. 458 bis 460).

Bei der Zeichnung der Grundfläche ist zu bemerken, daß der Bogen k h den Punkt a, der Bogen f d den Punkt c, der Bogen d e den Punkt b, der Bogen e s den Punkt w und der Bogen f z den Punkt t zum Kreismittelpunkt hat.

Um die Vorbereitungsfigur zu zeichnen, trägt man (Fig. 459) auf a b

Digitized by Google

die Höhe der Zarge von a nach c und zieht zu a c in a und c die Senkrechten d a und e c. Hierauf trägt man c f, d b, f a, w i und t k aus Fig. 458 nach Fig. 459 von c nach f, von c nach g, von c nach h, von c nach i und von c nach e, errichtet in dem Punkte f zu e c die Senkrechte k f, trägt i e (Fig. 458), die Ausladung, von k nach l und zieht durch l und f die Gerade l p. Durch die Punkte g, h, i und e zieht man ferner m q, n r, o s und d b parallel l p.

Um das Netz zu zeichnen, beschreibt man mit r h (Fig. 459) um den Punkt a (Fig. 460) den Bogen d e, auf welchen man die Teile des Bogens f e (Fig. 458) abträgt, und zieht durch die Punkte d und e die Geraden c a und f a. Hierauf beschreibt man mit r n (Fig. 459) in Fig. 460 den Bogen c f, trägt g k aus Fig. 458 von f nach g, sowie h i von c nach h, und zieht durch die erhaltenen Punkte g und h die Geraden e i und d k. Man trägt ferner b d (Fig. 459) von e nach i und beschreibt um den Punkt i den Bogen e l, auf welchen man die Teile des Bogens f z (Fig. 458) von e nach l trägt und zieht von l nach i die Gerade l i. Ferner beschreibt man mit b e (Fig. 459) um den Punkt i den Bogen f o, trägt m l (Fig. 458) nach Fig. 460 von n nach o, zieht durch den Punkt o die Gerade l o m, macht i m = m p und zieht l p; ebenso trägt man h i (Fig. 458) nach Fig. 460 von c nach h und zieht durch den Punkt h die Gerade d k. Hierauf trägt man s o (Fig. 459) auf d k (Fig. 460) von d nach k und beschreibt um den Punkt k den Bogen d q, auf welchen man die Teile des Bogens e s (Fig. 458) trägt; alsdann beschreibt man um den Punkt k mit i s (Fig. 459) den Bogen h r, zieht q k, trägt q r aus Fig. 458 von s nach r und zieht q r. Hierauf trägt man q m (Fig. 459) in Fig. 460 von c nach t und beschreibt um t die Bogen c u und d v; ebenso trägt man l p (Fig. 459) nach Fig. 460 von f nach w, beschreibt um w die Bogen u g und v e und zieht die Geraden t v, v w und u a. Die andere Hälfte des Netzes wird auf dieselbe Weise entworfen.

18. Den Auf- und Grundriß, sowie die Netzteile eines sechsseitigen Füllhorns zu entwerfen. (Fig. 461 und 465.)

Man zeichnet in Fig. 461 die beiden Profile a b d e und f g h k, zieht in nicht zu weiter Entfernung von einander mehrere Gerade, wie a f, b g, c h u. s. w., die Projektionen sechsseitiger das Füllhorn schneidenden Ebenen im Aufriß. Über jeder dieser Geraden konstruiert man die Hälfte eines gleichseitigen Sechsecks, wie b r s g, c u w h, d x y i u. s. w. und errichtet auf r s, u w, x y u. s. w. die Senkrechten p r, q s, u t, w v u. s. w., so bestimmen die Schnittpunkte p, q, t, v, z, β die Gradlinien des Füllhorns. Hierauf zeichnet man im Grundriß (Fig. 462) die Projektionen sämtlicher im Aufrisse befindlichen Schnittebenen. Um das Verfahren kennen zu lernen, wollen wir beispielsweise die Ebene d i wählen: Man zieht durch die Punkte d, z, β, i Senkrechte zu e' f' in Fig. 462 und erhält die Schnittpunkte d, x, y, i; hierauf trägt man die Strecke x z (Fig. 461) in Fig. 462 von x nach z und von y nach β und verbindet die Punkte d, z, β, i mit einander durch Gerade. Auf diese Weise konstruiert man auch die folgenden Ebenen im Grundrisse, welche sich alle als Sechsecke darstellen. Die Projektionen der Gradlinien im Grundriß erhält man durch die Verbindung der Eckpunkte sämtlicher im Grundrisse befindlichen Sechsecke.

Durch die im Aufrisse gezogenen Schnittebenen sind die Teile A, B und C in mehrere trapezartige Flächen geteilt, welche, da sie sich gegen die Bildfläche in geneigter Lage befinden, verkürzt erscheinen. Zeichnet man diese

Digitized by Google

Trapeze nach der im Aufrisse befindlichen Reihenfolge in ihrer wirklichen Größe, so erhält man hierdurch die Netzteile des Füllhorns. Nachstehend ist das Verfahren angegeben, nach dem die einzelnen Trapeze der Netzteile ausgetragen, d. h. in ihrer wirklichen Größe gezeichnet werden. Der Kürze halber soll indes bei jedem Netz nur die Austragung eines Trapezes beschrieben werden.

Um den Netzteil A zu zeichnen, zieht man durch die Punkte b, p, c, t (Fig. 461) Wagerechte nach D und errichtet in t' auf t' g die Senkrechte t' b'. Um die wirkliche Länge der Diagonalen b t und p c (Fig. 461) zu erhalten, bezeichnet man im Grundrisse die Projektionen der Punkte b, p, c, t des Aufrisses mit gleichen Buchstaben, trägt p c (Fig. 462) in D von c' nach c'' und zieht p' c''. Ferner trägt man b t des Grundrisses in D von t' nach t'' und zieht b' t''; die Strecken p' c'' und b' t'' geben die wirkliche Länge der Diagonalen p c und b t (Fig. 461). Um noch die wirkliche Länge der Strecke p t (Fig. 461) zu erhalten, trägt man p t (Fig. 462) in D von t' nach 2 und zieht p' 2, welche Strecke gleich der gesuchten Länge von p t ist.

In Fig. 463 giebt man b p die Länge von r s in Fig. 461 und beschreibt mit b' t'' und p' c'' in D (Fig. 461) um b und p in Fig. 463 die Kreisbogen bei c und t. Hierauf macht man mit b c (Fig. 461) in Fig. 463 von b aus den Schnitt bei c, ebenso macht man mit p' 2 (Fig. 461 D) von p in Fig. 463 aus den Schnitt bei t. Durch die Verbindung der Punkte b, c, t, p (Fig 463) erhält man die wirkliche Größe des Trapezes b p c t (Fig. 461). Auf die hier angegebene Art werden auch die folgenden Trapeze gezeichnet, bis der Netzteil vollendet ist. Der Deutlichkeit halber ist hier eins der mittleren Trapeze beschrieben worden; in der Regel zeichnet man aber das obere Trapez zuerst und setzt an dieses die anderen der Reihe nach an.

Um den Netzteil C zu zeichnen, zieht man durch die Punkte β, i, n, m Wagerechte nach E, zieht die Senkrechte β' m' und bezeichnet im Grundriß die Projektionen der Punkte β, i, n, m durch gleiche Buchstaben. Hierauf trägt man β m und n i des Grundrisses in E von m' nach m'' und von n' nach n'' und zieht β' m'' und i' n'', durch welche sich die richtige Länge der Diagonalen β m und i n ergiebt. Die wirkliche Länge der Geraden β n (Fig. 461) wird erhalten, wenn man β n des Grundrisses in E von n' nach 3 trägt und β' 3 zieht.

In Fig. 464 zieht man β i = x y (Fig. 461) und beschreibt mit β' m'' und i' n'' in E (Fig 461) in Fig. 464 um β und i die Kreisbogen bei m und n. Hierauf schneidet man mit i m (Fig. 461) in Fig. 464 von i aus β m in m, ebenso mit β' 3 (Fig. 461 E) von β aus i n in n. Durch die Verbindung der Punkte β, i, n, m (Fig. 464) erhält man die wirkliche Größe des Trapezes β i n m (Fig. 461).

Um den Netzteil B zu zeichnen, zieht man durch die Punkte t, v, z, β (Fig. 461) Wagerechte nach F, zieht zu g t' die Senkrechte t' β' und bezeichnet im Grundriß die Projektionen der Punkte t, v, z, β des Aufrisses mit gleichen Buchstaben. Hierauf trägt man t β und v z des Grundrisses in F von β' nach β'' und von z' nach z'' und zieht t' β'' und v' z'', wodurch man die wirkliche Länge der Diagonalen t β und v z (Fig. 461) erhält; die wirkliche Länge von t z und v β wird erhalten, wenn man t z und v β des Grundrisses in F von z' nach 5, sowie von β' nach 4 trägt und t' 5 und v' 4 zieht.

In Fig. 465 zieht man t v = u w (Fig. 461) und beschreibt mit t' β'' und v' z'' in F um t und v (Fig. 465) die Kreisbogen bei β und z. Hierauf schneidet man mit t' 5 und v' 4 in F den Bogen bei z in Fig. 465 in z,

Digitized by Google

den Bogen bei β in β. Durch die Verbindung der Punkte t, v, z, β (Fig. 465) erhält man die wirkliche Größe des Trapezes t v z β (Fig. 461).

Sollen die Netzteile oben blattförmig ausgeschnitten werden, wie in Fig. 463, dann zeichnet man das Profil in G, teilt die kleine Biegung a b c d e in mehrere Teile, trägt dieselben in Fig. 463 auf a e der Reihe nach ab, und zieht durch die Teilpunkte Senkrechte zu a e. Hierauf trägt man die Ausladung der Punkte a, b, c, d, e des Profils nach dem Grundriß, zieht durch die erhaltenen Punkte Senkrechte zu a e, zeichnet den Umfang des Blattes und trägt die Längen der durch das Blatt gezogenen Parallelen in Fig. 463 der Reihe nach ab. Bedeutend leichter zeichnet man ohne weitere Einteilung das Blatt aus freier Hand an den Netzteil.

Von den Zeicheninstrumenten und Zeichenmaterialien.

§ 159. Ein gutes Reißzeug ist unerläßlich, um eine Zeichnung sauber und richtig auszuführen. Die Hauptbestandteile desselben sind: ein Handzirkel, ein Einsatzzirkel mit der dazu gehörigen Reißfeder und dem Bleirohr, eine Reißfeder zum Ziehen der Geraden und ein rechtwinkliges Dreieck.

§ 160. Der Handzirkel muß zwei Schenkel aus Messing mit gut gehärteten Stahlspitzen besitzen; damit der Zirkel sich bequem öffnen und schließen läßt, muß sich der Kopf desselben vermittelst eines Zirkelschlüssels fest oder locker schrauben lassen; auch darf der Zirkel beim Öffnen oder Schließen nicht schlottern, sondern er muß sich leicht und gleichmäßig bewegen; ferner müssen bei geschlossenem Zirkel beide Spitzen dicht zusammen liegen. Dieser Zirkel wird gewöhnlich dazu gebraucht, um eine Strecke abzutragen oder einen Bogen in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zu teilen.

§ 161. Der Einsatzzirkel soll dieselben Eigenschaften besitzen wie der Handzirkel, nur muß man den einen Fuß herausnehmen und statt dessen die Reißfeder oder das Bleirohr einsetzen können. Dieser Zirkel dient besonders zum Zeichnen der Kreise mit Blei oder Tusche.

§ 162. Die beiden stählernen Blätter der Reißfeder müssen gleich lang und weder zu stumpf noch zu scharf sein, damit die Geraden, welche man zieht, nicht zu stark werden, noch die Feder in das Papier einschneidet. Nachdem die Reißfeder in aufgelöste Tusche getaucht ist, müssen die Platten sorgfältig abgewischt werden, damit sich keine Tusche an das Lineal setzt; auch hat man darauf zu achten, daß die in der Feder befindliche Tusche nicht trocknet, denn hierdurch wird das Ziehen der Geraden verhindert. Nachdem man die Feder gebraucht, schraubt man die Blätter derselben aus einander, reinigt sie von der Tusche und trocknet sie rein ab.

§ 163. Das Reißbrett muß aus sehr trockenem Lindenholze angefertigt, die obere Seite vollkommen glatt und rechtwinklig sein und die untere Seite Leisten haben, damit sich das Brett nicht werfen kann.

§ 164. Die Reißschiene muß aus trockenem Holze verfertigt und wenigstens so lang als das Reißbrett sein. An dem einen Ende der Schiene befindet sich der Kopf, welcher aus einem Querholze besteht, das winkelrecht an dem Lineal befestigt ist. Um die Richtigkeit der Reißschiene zu prüfen, hält man in die Winkel, welche Lineal und Kopf mit einander bilden, ein rechtwinkliges Dreieck. Wenn Dreieck und Reißschiene in allen ihren Punkten genau zusammenpassen, so ist die Reißschiene richtig.

§ 165. Bevor man die Reißschiene benutzt, muß man sich überzeugen, daß das Brett winkelrecht gearbeitet ist. Zu diesem Zwecke zieht man mit der Schiene

Digitized by Google

eine Wagerechte, errichtet auf derselben mittelst geometrischer Konstruktion eine Senkrechte und sieht, ob die Kante der Reißschiene in allen ihren Punkten mit diesen Geraden zusammen fällt, wenn man dieselbe mit dem Kopfe an alle Seiten des Brettes fest anlegt. Ist dies der Fall, so ist das Reißbrett winkelrecht.

§ 166. Will man mit der Reißschiene Wagerechte ziehen, so legt man den Kopf der Schiene an die linke Seite des Reißbrettes fest an und schiebt dieselbe mit der linken Hand, je nachdem es erforderlich ist, nach oben oder unten, und zieht auf diese Weise die verlangten Parallelen. Sollen hingegen mit der Reißschiene Senkrechte gezogen werden, so legt man den Kopf derselben an die untere Seite des Brettes fest an und verfährt im übrigen wie beim Ziehen der Wagerechten.

§ 167. Soll eine Zeichnung mit Tusche angelegt (getuscht, schattiert) werden, so bedient man sich hierzu der feinen Haarpinsel. Die Haare des Pinsels müssen sehr weich, aber nicht zu lang sein. Zieht man den Pinsel durch die eng gemachte Mundöffnung, so zeigt und behält ein guter Pinsel eine feine Spitze, auch wenn man ihn leicht auf der Hand hin und her zieht.

Die Pinsel mittlerer Größe sind für den Gebrauch die vorteilhaftesten, denn mit zu kleinen lassen sich größere Flächen nicht gleichmäßig anlegen. Zum Schattieren werden zwei an einem 10—15 cm langen Stock befestigte Pinsel benutzt, von denen der eine mit Tusche, der andere mit reinem Wasser gefüllt wird. Nach dem Gebrauch darf man die Tusche im Pinsel nicht eintrocknen lassen, sondern man muß dieselbe in Wasser gehörig ausspülen.

§ 168. Gewöhnlich bedient man sich zum Zeichnen des Velinpapiers; dasselbe muß jedoch stark und ohne Flecken sein.

Beim Aufspannen des Papiers verfährt man folgendermaßen: Der Bogen wird mit der besten Seite nach oben auf das Brett gelegt, ein schmaler Falz an den Seiten des Papiers nach oben umgebogen, die untere Fläche, jedoch nicht die umgebogenen Seiten, mittelst eines nassen Schwammes ein wenig angefeuchtet und der aufgebogene Falz mit Leim oder einer dicken Auflösung von arabischem Gummi bestrichen. Alsdann zieht man die gegenüberstehenden Ecken des Papiers etwas an, drückt die geleimten Seiten, bevor der Leim erkaltet, fest auf das Brett, reibt mit dem Daumennagel der rechten Hand auf dem Rande des Papiers hin und her und verhindert das Entstehen allzu großer Falten durch Anspannen des Papiers nach allen vier Seiten; sobald das Ganze trocken ist, verschwinden die Falten, welche sich erst gezeigt haben.

§ 169. Ein zum Zeichnen geeigneter Bleistift darf weder zu hart noch zu weich sein und muß, gut gespitzt, bei leichter Führung die Linien sauber und fein darstellen, da nur feine Linien eine genaue Zeichnung liefern. Das Aufdrücken und Naßmachen ist zu vermeiden, denn hierdurch werden die Linien zu stark und lassen sich, wenn nötig, nur sehr schwer ausreiben.

§ 170. Die beste schwarze Tusche, die chinesische, zeigt am Bruch ein feines glänzendes Aussehen, löst sich nicht zu leicht auf, riecht aufgelöst stark nach Moschus und hat im flüssigen Zustande ein bräunliches Aussehen. Schlechte Tusche ist gewöhnlich blau-grau und läßt sich nicht gleichmäßig anlegen. Einmal aufgelöste und wieder eingetrocknete Tusche darf keine Verwendung finden; daher ist nur immer so viel zu benutzen, als zum Gebrauch nötig ist.

§ 171. Will man eine Fläche anlegen (§ 167), so nimmt man den Pinsel nicht zu voll, macht bei der linken Seite der Fläche den Anfang, das heißt man fährt an dem Umriß mit dem Pinsel herunter, streicht die Tusche von oben nach

Digitized by Google

unten oder von links nach rechts in so breiten Strichen, als die Größe des Pinsels zuläßt, nimmt die flüssige Tusche immer vor sich her mit, ohne sie trocknen zu lassen, und vermeidet das Aufdrücken. Die einmal gewählte Richtung muß man auf der ganzen Fläche beibehalten, auch darf man nicht auf mehreren Stellen zugleich anfangen oder eine Stelle doppelt anlegen.

Beim Anlegen ziemlich dunkler Flächen nimmt man ebenfalls ganz blasse Tusche, und überlegt dieselbe hiermit so oft, bis die Farbe dunkel genug erscheint. Hat man im Anlegen einige Fertigkeit erlangt, so kann man, um die Arbeit zu verkürzen, die Tusche auch etwas dunkler einreiben.

Wird eine Fläche mehrere Male mit Tusche überzogen, so muß man warten, bis die bereits angelegte Stelle trocken geworden ist.

Zum Anlegen ganz schwarzer Flächen reibt man die Tusche völlig dunkel ein und überlegt die Fläche nur einmal, weil sie hierdurch schöner wird, als wenn man sie mit blasser Tusche öfter überzieht. Damit man nicht so leicht über den Umriß hinausfährt, zieht man die Grenzen der Flächen etwas breiter als gewöhnlich mit schwarzer Tusche aus.

§ 172. Will man einer Fläche nicht überall denselben Ton geben, d. h. soll sie an der einen Stelle dunkler werden als an der anderen, so erreicht man dies durch das Verwaschen der Tusche.

Soll eine Fläche mit Tusche verwaschen werden, so befestigt man auf dem Pinselstock zwei Pinsel — den einen zu Tusche, den andern zu reinem Wasser —, taucht den einen Pinsel in blasse Tusche, legt die dunkelsten Stellen in einer zu dem Verhältnis passenden Breite an und nimmt mittelst des anderen mit Wasser gefüllten Pinsels die Kante der angelegten Tusche, bevor dieselbe getrocknet, strichweise und in derselben Richtung, indem man den Pinsel öfter mit reinem Wasser benetzt und durch den Mund zieht, sobald er zu trocknen, oder das in demselben befindliche Wasser sich zu färben beginnt, so lange weg, bis sich die Tusche gleichmäßig und sanft verläuft und von der Farbe des Papiers nicht mehr unterscheidet; indes darf man die lichten Stellen, damit sie rein und weiß bleiben, nicht mit dem Pinsel berühren.

Mit einem Male läßt sich eine Fläche nicht gleichmäßig verwaschen, man muß daher diese Arbeit mehrere Male wiederholen und die Stelle, welche am dunkelsten werden soll, nachdem sie getrocknet, so oft mit Tusche überziehen, bis die gewünschte Färbung erlangt ist.

§ 173. Bevor man eine Zeichnung anlegt, sind alle Flecken zu entfernen und sämtliche vorhandenen Bleilinien durch Gummi elasticum abzureiben. Hat man aus Versehen unrichtige Linien gezogen oder Tuschflecke gemacht, so kann man dieselben entweder radieren oder vermittelst eines mit reinem Wasser gefüllten Schwammes abwaschen.

§ 174. Wenn die Tusche, mit welcher man die Linien gezogen, nicht gut steht, d. h., wenn sich die Linien, sobald man beim Tuschen mit blasser Tusche darüber hinfährt, auflösen, so kann dies dadurch verhindert werden, daß man die Tusche mit ein wenig Essig vermischt. Um eine Zeichnung von Bleilinien und Schmutzflecken zu reinigen, hält man das Reißbrett in beinahe senkrechter Richtung unter einen Brunnen und pumpt so lange Wasser darauf, bis sich von den gezogenen Linien keine Tusche mehr absondert. Läßt man hierauf das so gereinigte Papier wieder trocknen, so werden sich die Linien beim Tuschen nicht mehr auflösen.

§ 175. Die Tuschfarben, welche zum Anlegen der Bau-, Maschinen- und Möbel-Zeichnungen gebraucht werden, sind: rot, blau und gelb. Zur roten

Digitized by Google

Farbe nimmt man roten Carmin, zur blauen Berlinerblau, und zur gelben Gummigutti oder Chromgelb. Mit der schwarzen und den genannten drei Farben lassen sich die verschiedenartigsten Farbentöne durch Mischung hervorbringen. Durch blau und gelb erhält man grün, durch blau und rot violett, durch rot und schwarz braun und durch schwarz, ein wenig gelb und rot grau. Je nachdem man von der einen Farbe mehr oder weniger nimmt, ändern sich die Farbentöne. Die Tuschfarben müssen äußerst blaß gehalten und nur sehr dünn aufgetragen werden; denn je dünner man dieselben anlegt, um so schöner wird die Zeichnung.

§ 176. Öl- oder Fettflecke entfernt man aus dem Papier, indem man sie mit geschabtem weißen Bolus bestreut, ein Brett auf die Zeichnung legt und das Ganze unter einer Presse 24 bis 36 Stunden stehen läßt. Vergilbtes oder Stockflecke enthaltendes Papier kann auf folgende Art gebleicht werden: Man löst ein Teil Chlorkalk in 24 Teilen Wasser, gießt Essig zur filtrierten Mischung, bis sie sauer schmeckt, und legt das Papier hinein.

§ 177. Die schon angelegten oder verwaschenen Stellen müssen während der Arbeit sehr reinlich gehalten werden, da sie an Glanz und Ansehen verlieren, wenn Schmutzflecke nachträglich abgerieben werden sollen. Die Flecken, so wie alle Unreinigkeiten sind am leichtesten zu vermeiden, wenn das Reißbrett auf den Stellen, wo man nicht arbeitet, mit einem Unterlegblatt bedeckt wird. Die fertige Zeichnung schneidet man mittelst eines scharfen Federmessers ab.

Digitized by Google

Tabelle der spezifischen Gewichte fester und flüssiger Körper.

Alabaster	2,70		
Amalgam	14,1		
Antimon	6,65	bis	6,72
Argenton (Neusilber)	8,4	„	8,7
Asphalt	1,07	„	1,16
Basalt	2,9	„	3,2
Blei	11,37	„	11,40
Braunkohle	1,2	„	1,5
Coaks	1,4		
Diamant	3,5		
Eis	0,92		
Eisen, geschmiedet	7,6	„	7,79
„ gegossen	7,0	„	7,5
„ in Draht	7,6	„	7,75
Glas, Fenster-	2,64		
„ Flint-	3,20		
Glockenmetall	8,81		
Gold, gediegen	18,6		
„ gegossen	19,25		
„ gehämmert	19,3		
Granit	2,50	„	3,05
Gyps, gebrannt	1,81		
„ gegossen	0,97		

Holzarten:	trocken	frisch
Ahorn	0,69	0,84
Birke	0,74	0,90
Birnbaum	0,73	
Buche, Roth-	0,75	0,98
„ Weiß-	0,73	1,04
Buchsbaum	0,79	1,05
Ebenholz	0,19	
Eiche	0,85	0,97
Fichte	0,47	0,92
Kiefer	0,55	0,91
Kork	0,24	

Holzarten:	trocken	frisch
Linde	0,56	0,82
Mahagoni	1,06	
Nußbaum	0,66	0,88
Pappel	0,36	0,78
Pockholz	1,33	
Steineiche	1,07	
Tanne	0,56	0,89
Weide	0,58	0,99

Kalk gebrannter	2,3	bis	3,18
Kalkmörtel	1,64	„	1,86
Kalkstein	2,46	„	2,84
Kreide, weiße	1,8	„	2,66
Kupfer, gegossen	8,59	„	8,90
„ gehämmert	8,76	„	9,00
Lehm	1,52	„	2,85
Marmor	2,52	„	2,85
Mauerwerk, Bruchstein-	2,40	„	2,60
„ Sandstein-	2,05	„	2,12
„ Ziegelstein-	1,47	„	1,70
Messing, gegossen	8,40	„	8,71
„ gewalzt	8,52	„	8,62
Platin	21,3		
Sand, trocken	1,40	„	1,64
Sandstein	1,90	„	2,05
Silber, gegossen	10,10	„	10,47
„ gehämmert	10,51	„	10,62
Stahl, Cement	7,26	„	7,80
„ Guß	7,83	„	7,92
Steinkohlen	1,21	„	1,51
Wismut	9,78		
Ziegelstein, gewöhnlicher	1,40	„	2,20
„ Klinker	1,52	„	2,29
Zink, gegossen	6,86		
„ gewalzt	7,19	„	7,21
Zinn	7,29		

Alkohol, absoluter	0,792
Bier	1,034
Milch	1,040
Leinöl	0,940
Rüböl	0,913
Steinöl	0,798

Terpentinöl	0,887
Quecksilber	13,596
Salzsäure	1,192
Schwefelsäure	1,843
Wasser, destilliertes	1,000
Seewasser	1,040

Digitized by Google

Kreisumfänge, Kreisinhalte, Quadrate, Kuben, Quadrat- und Kubikwurzeln.

$\pi = 3{,}14 \quad 2\pi = 6{,}28 \quad \frac{1}{\pi} = 0{,}318 \quad \frac{1}{2\pi} = 0{,}159 \quad \frac{2}{\pi} = 0{,}636 \quad \frac{\pi}{2} = 1{,}57$

$\frac{\pi}{4} = 0{,}785 \quad \frac{\pi}{6} = 0{,}523 \quad \frac{\pi}{32} = 0{,}098 \quad \frac{\pi}{64} = 0{,}049 \quad \pi^2 = 9{,}8696$

$\pi^3 = 31{,}006 \quad \sqrt{\pi} = 1{,}772 \quad \sqrt[3]{\pi} = 1{,}464 \quad \sqrt{\frac{1}{\pi}} = 0{,}564$

$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0{,}798 \quad \sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = 0{,}683 \quad \sqrt[3]{\frac{2}{\pi}} = 0{,}860$

d	$d\pi$	$d^2\frac{\pi}{4}$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
1,0	3,142	0,7854	1,00	1,000	1,0000	1,0000
1,1	3,456	0,9503	1,21	1,331	1,0488	1,0323
1,2	3,770	1,1310	1,44	1,728	1,0955	1,0627
1,3	4,084	1,3273	1,69	2,197	1,1402	1,0914
1,4	4,398	1,5394	1,96	2,744	1,1832	1,1187
1,5	4,712	1,7672	2,25	3,375	1,2247	1,1447
1,6	5,027	2,0106	2,56	4,096	1,2649	1,1696
1,7	5,341	2,2698	2,89	4,913	1,3038	1,1935
1,8	5,655	2,5447	3,24	5,832	1,3416	1,2164
1,9	5,969	2,8353	3,61	6,859	1,3704	1,2386
2,0	6,283	3,1416	4,00	8,000	1,4142	1,2599
2,1	6,597	3,4636	4,41	9,261	1,4491	1,2806
2,2	6,912	3,8013	4,84	10,648	1,4832	1,3006
2,3	7,226	4,1548	5,29	12,167	1,5166	1,3200
2,4	7,540	4,5239	5,76	13,824	1,5492	1,3389
2,5	7,854	4,9087	6,25	15,625	1,5811	1,3572
2,6	8,168	5,3093	6,76	17,576	1,6125	1,3751
2,7	8,482	5,7256	7,29	19,683	1,6432	1,3925
2,8	8,797	6,1575	7,84	21,952	1,6733	1,4095
2,9	9,111	6,6052	8,41	24,389	1,7029	1,4260
3,0	9,425	7,0686	9,00	27,000	1,7321	1,4422
3,1	9,739	7,5477	9,61	29,791	1,7607	1,4581
3,2	10,053	8,0425	10,24	32,768	1,7889	1,4736
3,3	10,367	8,5530	10,89	35,937	1,8166	1,4888
3,4	10,681	9,0792	11,56	39,304	1,8439	1,5037

Digitized by Google

d	$d\pi$	$d^2\frac{\pi}{4}$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
3,5	10,996	9,6211	12,25	42,875	1,8708	1,5183
3,6	11,310	10,179	12,96	46,656	1,8974	1,5326
3,7	11,624	10,752	13,69	50,653	1,9235	1,5467
3,8	11,938	11,341	14,44	54,872	1,9494	1,5605
3,9	12,252	11,946	15,21	59,319	1,9748	1,5741
4,0	12,566	12,566	16,00	64,000	2,0000	1,5874
4,1	12,881	13,203	16,81	68,921	2,0249	1,6005
4,2	13,195	13,854	17,64	74,088	2,0494	1,6134
4,3	13,509	14,522	18,49	79,507	2,0736	1,6261
4,4	13,823	15,205	19,36	85,184	2,0976	1,6386
4,5	14,137	15,904	20,25	91,125	2,1213	1,6510
4,6	14,451	16,619	22,16	97,336	2,1448	1,6631
4,7	14,765	17,349	22,09	103,823	2,1680	1,6751
4,8	15,080	18,096	23,04	110,592	2,1909	1,6869
4,9	15,394	18,857	24,01	117,649	2,2136	1,6985
5,0	15,708	19,635	25,00	125,000	2,2361	1,7100
5,1	16,022	20,428	26,01	132,651	2,2583	1,7213
5,2	16,336	21,237	27,04	140,608	2,2804	1,7325
5,3	16,650	22,062	28,09	148,877	2,3022	1,7435
5,4	16,965	22,902	29,16	157,464	2,3238	1,7544
5,5	17,279	23,758	30,25	166,375	2,3452	1,7652
5,6	17,593	24,630	31,36	175,616	2,3664	1,7758
5,7	17,907	25,518	32,49	185,193	2,3875	1,7863
5,8	18,221	26,421	33,64	195,112	2,4083	1,7967
5,9	18,535	27,340	34,81	205,379	2,4290	1,8070
6,0	18,850	28,274	36,00	216,000	2,4495	1,8171
6,1	19,164	29,225	37,21	226,981	2,4698	1,8272
6,2	19,478	30,191	38,44	238,328	2,4900	1,8371
6,3	19,792	31,173	39,69	250,047	2,5100	1,8469
6,4	20,106	32,170	40,96	262,144	2,5298	1,8566
6,5	20,420	33,183	42,25	274,625	2,5495	1,8663
6,6	20,735	34,212	43,56	287,496	2,5691	1,8758
6,7	21,049	35,257	44,89	300,763	2,5884	1,8852
6,8	21,363	36,317	46,24	314,432	2,6077	1,8945
6,9	21,677	37,393	47,61	328,509	2,6268	1,9038

Digitized by Google

d	$d\pi$	$d^2\frac{\pi}{4}$	d^2	d^3	$\sqrt{d}$	$\sqrt[3]{d}$
7,0	21,991	38,485	49,00	343,000	2,6458	1,9129
7,1	22,305	39,592	50,41	357,911	2,6646	1,9220
7,2	22,619	40,715	51,84	373,248	2,6833	1,9310
7,3	22,934	41,854	53,29	389,017	2,7019	1,9399
7,4	23,248	43,008	54,76	405,224	2,7203	1,9487
7,5	23,562	44,179	56,25	421,875	2,7386	1,9574
7,6	23,876	45,365	57,76	438,976	2,7568	1,9661
7,7	24,190	46,566	59,29	456,533	2,7749	1,9747
7,8	24,504	47,784	60,84	474,552	2,7929	1,9832
7,9	24,819	49,017	62,41	493,039	2,8107	1,9916
8,0	25,133	50,266	64,00	512,000	2,8284	2,0000
8,1	25,447	51,530	65,61	531,441	2,8461	2,0083
8,2	25,761	52,810	67,24	551,368	2,8636	2,0165
8,3	26,075	54,106	68,89	571,787	2,8810	2,0247
8,4	26,389	55,418	70,56	592,704	2,8983	2,0328
8,5	26,704	56,745	72,25	614,125	2,9155	2,0408
8,6	27,018	58,088	73,96	636,056	2,9326	2,0488
8,7	27,332	59,447	75,69	658,503	2,9496	2,0567
8,8	27,646	60,821	77,44	681,472	2,9665	2,0646
8,9	27,960	62,211	79,21	704,969	2,9833	2,0724
9,0	28,274	63,617	81,00	729,000	3,0000	2,0801
9,1	28,588	65,039	82,81	753,571	3,0166	2,0878
9,2	28,903	66,476	84,64	778,688	3,0332	2,0954
9,3	29,217	67,929	86,49	804,357	3,0496	2,1029
9,4	29,531	69,398	88,36	830,584	3,0659	2,1105
9,5	29,845	70,882	90,25	857,375	3,0822	2,1179
9,6	30,159	72,382	92,16	884,736	3,0984	2,1253
9,7	30,473	73,898	94,09	912,673	3,1145	2,1327
9,8	30,788	75,430	96,04	941,192	3,1305	2,1400
9,9	31,102	76,977	98,01	970,299	3,1464	2,1472
10,0	31,416	78,540	100,00	1000,000	3,1623	2,1544

Digitized by Google

Inhalt der Flächen und Körper.

a, b, c, d = Seiten, Kanten; s beim Dreieck = halber Umfang = $\frac{a+b+c}{2}$; h = Höhe; R, r = Radius; D, d = Durchmesser; s bei dem Kreise und der Parabel = Sehne; a, b bei der Ellipse = Halbachsen; s bei Körpern = Seitenkante; a, b bei der Kugel = Radien kleiner Kreise; U = Umfang; U_N = Umfang des Normalschnitts; F, G, G_1, N = Flächeninhalt; M = Mantel; O = Oberfläche; J = Rauminhalt.

Dreieck.

$U = a+b+c$

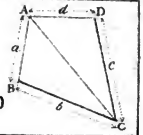
$F = \frac{1}{2} a.h$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Viereck.

$U = a+b+c+d$

$F =$ Dreieck A B C + A C D

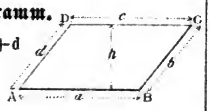


Parallelogramm.

$U = a+b+c+d$

$= 2a+2b$

$F = a.h$



Rechteck.

$U = a+b+c+d$

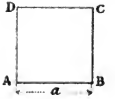
$= 2a+2b$

$F = a.b$

Quadrat.

$U = 4a$

$F = a^2$



Paralleltrapez.

$U = a+b+c+d$

$F = \frac{(a+b).h}{2}$

Kreis.

$U = 2r\pi = d.\pi$

$F = r^2\pi = \frac{d^2\pi}{4}$

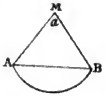
Kreisausschnitt.

Bogen $= \frac{2r\pi.\alpha}{360} = \frac{d.\pi.\alpha}{360}$

$F = \frac{r^2\pi.\alpha}{360} = \frac{d^2\pi}{4.360}$

Kreisabschnitt.

$F =$ Ausschnitt $-$ Dreieck M A B.

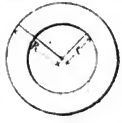


Kreisring.

$U = 2R\pi + 2r\pi$

$F = (R^2 - r^2)\pi$

$= (R+r)(R-r)\pi$



Ellipse.

$U = \pi(a+b)\left\{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \right\}$

$F = a.b.\pi$

Parabelstück.

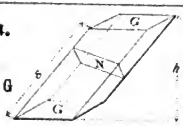
$F = \frac{2}{3} s.h$

Prisma.

$M = s.U_N$

$O = M + 2G$

$J = G.h$

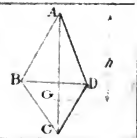


Pyramide.

$M =$ Summe der Seitenflächen

$O = M + G$

$J = \frac{G.h}{3}$



Digitized by Google

Pyramidenstumpf.

M = Summe der Seitenflächen

$O = M + G + G_1$

$J = (G + G_1 + \sqrt{G\,G_1})\,\frac{h}{3}$

Schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma.

M = Summe der Seitenflächen.

$O = M + G + G_1$

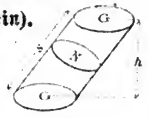
$J = (a + b + c)\,\frac{N}{3}$

Cylinder (allgemein).

$M = s \cdot U_N$

$O = M + 2G$

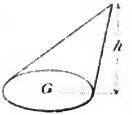
$J = G \cdot h$



Kegel (allgemein).

$O = M + G$

$J = \frac{G \cdot h}{3}$



Gerader Kreiscylinder.

$M = 2r\pi \cdot h = d \cdot \pi \cdot h$

$O = 2r\pi\,(r + h)$

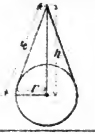
$J = r^2 \pi \cdot h$

Gerader Kreiskegel.

$M = r\pi s$

$O = r\pi\,(r + s)$

$J = \frac{1}{3} r^2 \pi \cdot h$

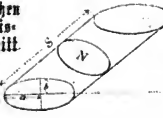


Cylinder mit elliptischen Grundflächen und kreisförmigem Normalschnitt.

$M = 2r\pi\,s = d\pi s$

$O = 2r\pi s + 2ab\pi$

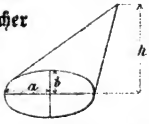
$J = a \cdot b \cdot \pi \cdot h$



Kegel mit elliptischer Grundfläche.

$O = M + a\,b\,\pi$

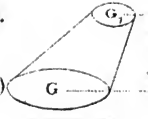
$J = \frac{1}{3} a \cdot b \cdot \pi \cdot h$



Kegelstumpf (allgemein).

$O = M + G + G_1$

$J = \frac{h}{3}(G + G_1 + \sqrt{G\,G_1})$

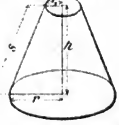


Gerader Kreiskegelstumpf.

$M = s\,\pi\,(r + r_1)$

$O = s\,\pi \cdot r + r_1) + r^2\pi + r_1{}^2\pi$

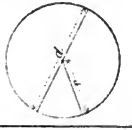
$J = \frac{h \cdot \pi}{3}(r^2 + r_1{}^2 + r\,r_1)$



Kugel.

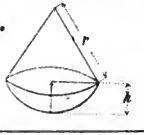
$O = 4\,r^2\,\pi = d^2\,\pi$

$J = \frac{4}{3} r^3\,\pi = \frac{d^3\,\pi}{6}$



Kugelausschnitt.

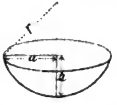
$J = \frac{2}{3} r^2\,\pi \cdot h$



Kugelabschnitt.

$J = \frac{h^2\,\pi}{3}(3r - h) =$

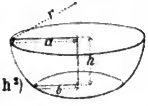
$\frac{h\,\pi}{6}(3a^2 + h^2)$



Kugelzone.

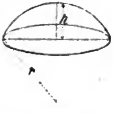
$M = 2r\,\pi\,h$

$J = \frac{h\,\pi}{6}(3a^2 + 3b^2 + h^2)$



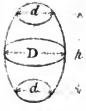
Kugelkappe.

$F = 2r\,\pi \cdot h$



Faß mit kreisförmigen Grundflachen; Dauben kreisförmig.

$J = \frac{h \cdot \pi}{3.4}(2D^2 + d^2)$



Digitized by Google

Princeton University Library
32101 076800331

Digitized by Google

Im gleichen Verlage sind erschienen:

Praktische Lehrbücher für den Selbstunterricht.

Der deutsche Rechenmeister

oder

Die Kunst, in kürzester Zeit und mühelosesten Methoden, welche bis jetzt bekannt sind, in allen Fällen des bürgerlichen Lebens und öffentlichen Verkehrs richtig rechnen, denken und sicher leben zu lernen.

Ein Buch für Jedermann

von Autodidakten

E. D. Präsicke.

11. Auflage. — Mit Figurentafeln. — In 10 Lieferungen à 20 ₰.
Complet broschirt 1 ℳ. — In Leinwand gebunden 1 ℳ 50 ₰.

Der deutsche Sprachmeister

Ein Buch zum Selbstunterricht für Alle, welche in möglichst kurzer Zeit alle Regeln der deutschen Sprache erlernen und die Richtigkeit derselben in allen vorkommenden Fällen sich schriftlich und mündlich gewandt anzueignen.

von Autodidakten

G. D. Präsicke.

5. Auflage. — In 10 Lieferungen à 20 ₰.
Complet broschirt 1 ℳ. — In Leinwand gebunden 1 ℳ 50 ₰.

Praktische Anleitung zur Projektions-Lehre

für Kunst-, Gewerbe- und Fachschulen, wie auch zum Selbstunterricht

für Bau-Gewerk-Meister, Zimmerleute, Tischler, Steinmetzen, Klempner, Kupferschmiede, Dreher, Drechsler, Maschinen-, Mühlen- und Locomotiven-Bauer, Schlosser, Uhrmacher, Bau- u. Wasserleitungsanlagen, landwirthschaftliche Techniker u. s. w.

von **Th. Raetz.**

Dritte Auflage. — Mit 4 Bl. 20 S. Text und 9 Figurentafeln.

Preis 1 ℳ 50 ₰.

Praktische Anleitung zur Schatten-Construction

für Kunst- und Gewerbeschulen, wie auch für den Selbstunterricht

von **Th. Raetz.**

Mit 6 Figurentafeln. Gr. 4. Geh. Preis 1 ℳ 50 ₰.

Die Projektionslehre leitet den Schüler zur Anwendung der Methode und Regeln an, und somit ist sie in der Mittelzeit vorgenommene Vorarbeit in kürzester Weise, daß sie in Bälde vollendet sein kann. Auch ist sie sehr geeignet zu Studien.

Durch die sich vorzüglich schattirenden Schatten-Constructionen erhalten die geometrischen Zeichnungen Körperlichkeit, und Licht und Schatten, indem sie durch die richtige Anwendung der Regeln und Objective Klarheit vor Augen stellen, sind sie ein vollendetes Studium, um sich selbst praktisch und verständlich machen.

Google